

**Hidráulica**

**B. NEKRASOV**

**B. NEKRASOV** ***Hidráulica***



*Б. Некрасов*

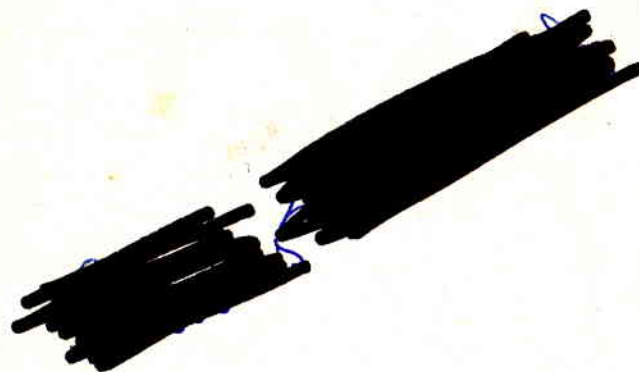
# ГИДРАВЛИКА

*На испанском языке*

*B. Nekrasov*

# HIDRAULICA

*Segunda edición*



---

EDITORIAL MIR

MOSCÚ

Traducido del ruso por E. Yudkevich

El presente libro está destinado para servir de manual de Hidráulica en las Escuelas técnicas superiores.

Además de los problemas principales de hidráulica general, en él se exponen nociones de la teoría de las máquinas hidráulicas, particularmente, de bombas y transmisiones hidráulicas.

El autor trata de enlazar la materia expuesta con su aplicación práctica, para lo cual ha incluido en el libro ejemplos de cálculos hidráulicos sencillos.



Primera edición 1964  
Segunda edición 1966

Impreso en la URSS

Derechos reservados

# 1

## Introducción

### § 1. La Hidráulica como disciplina

La parte de la mecánica que estudia el equilibrio y el movimiento de los líquidos, así como la acción recíproca de las fuerzas del líquido y de los cuerpos sumergidos en él, se denomina *hidromecánica*. Si además de los líquidos se estudia también el movimiento de los gases y el de cuerpos sólidos en un medio gaseoso (aéreo), recibe el nombre de *aerohidromecánica*.

Una rama de aplicación de la mecánica de los fluidos es la *hidráulica*, para la cual es característico cierto grupo de cuestiones y problemas técnicos y métodos para su solución.

La hidráulica se define generalmente como la ciencia que trata sobre las leyes del equilibrio y movimiento de los líquidos, y la aplicación de dichas leyes a la solución de problemas prácticos. Esta definición requiere ciertas precisiones y explicaciones.

En hidráulica se estudian principalmente los flujos de líquido dirigidos y limitados por paredes resistentes, es decir, corrientes en cauces abiertos y cerrados. En la noción de «cauce» incluiremos todos los dispositivos que limitan y dirigen la corriente; por consiguiente no sólo los lechos de los ríos, canales y vertederos, sino también diversas tuberías, boquillas adicionales, elementos de máquinas hidráulicas y otros dispositivos, en el interior de los cuales fluye el líquido.

De modo que se puede decir que en la hidráulica se estudian, principalmente, las corrientes interiores de los líquidos y se resuelven los problemas «interiores», a diferencia de los problemas «exteriores» ligados con el flujo exterior de un medio continuo por la superficie de los cuerpos, lo que tiene lugar durante el movimiento de un cuerpo sólido en un líquido o en un gas (aire). Estos problemas «exteriores» se estudian en la aerohidromecánica, los cuales, debido a las necesidades de la aviación y de la construcción naval, adquieren un desarrollo considerable.

Conviene señalar que habitualmente al término de «líquido» se le atribuye un sentido más amplio en la hidromecánica que en la vida cotidiana. En la noción de «líquido» se incluyen todos los cuerpos



para los cuales es característica la propiedad de fluidez, es decir, la capacidad de deformarse como se desee bajo la acción de fuerzas por pequeñas que éstas sean. Por eso, en esta noción van incluidos tanto los líquidos habituales, es decir, los así llamados de gotas, como también los gases.

Los primeros se caracterizan por que cuando están en cantidades insignificantes toman una forma esférica, y en grandes volúmenes forman, como regla, una superficie libre. Los líquidos presentan una particularidad importante, consistente en una modificación infinitamente pequeña de su volumen al variar la presión y la temperatura, por lo cual son considerados generalmente incompresibles. Los gases, al contrario, disminuyen considerablemente de volumen bajo la acción de la presión, y se dilatan ilimitadamente si la presión es nula, es decir, poseen gran compresibilidad.

Pese a dicha diferencia, en ciertas condiciones, se puede considerar idénticas las leyes del movimiento de los líquidos y de los gases. Su condición principal es un valor pequeño de la velocidad de la corriente del gas en comparación con la velocidad de difusión del sonido en éste.

En hidráulica se examinan principalmente los movimientos de los líquidos, y en la mayoría de los casos, estos últimos son considerados incompresibles. En cuanto a las corrientes interiores de gases, cabe señalar que éstas pasan a la esfera de la hidráulica solamente cuando las velocidades de su corriente son considerablemente menores que la velocidad del sonido y, por consiguiente, cuando se puede despreciar la compresibilidad del gas. Semejante movimiento de los gases se observa en la práctica bastante a menudo: el flujo del aire en sistemas de ventilación y en algunos gasoductos.

El estudio del movimiento de los líquidos y, máxime, el de los gases es un problema más difícil y complicado que el estudio del movimiento de un cuerpo absolutamente sólido, puesto que, en la mecánica del cuerpo sólido tenemos un sistema de partículas rígidamente entrelazadas, mientras que en la de los líquidos se examina un medio compuesto de gran cantidad de partículas en movimiento.

Incluso el célebre Galileo dijo que es mucho más fácil estudiar el movimiento de los astros celestes que el de un arroyo que corre a nuestros pies.

Como consecuencia de estas dificultades, el desarrollo histórico de la mecánica de los líquidos iba por dos caminos diferentes.

El primer camino era puramente teórico, de análisis matemático exacto, basado en las leyes de la mecánica. Esto condujo a la creación de la hidromecánica teórica, ciencia que durante mucho tiempo era una disciplina independiente. El método de la hidromecánica teórica es atrayente y, a la vez, un medio muy efectivo de investigación científica. Sin embargo, en el camino de la investigación puramente teórica del movimiento de los líquidos se tropieza con gran cantidad

de dificultades, y este método no siempre responde a las cuestiones que plantea la práctica.

Por eso, de los problemas vitales de la actividad práctica de los hombres surgió otra ciencia sobre el movimiento de los líquidos, la Hidráulica, en la cual los investigadores eligieron otro camino: la amplia aplicación del experimento y la acumulación de datos experimentales para su utilización en la ingeniería práctica. En el período inicial de su desarrollo, la Hidráulica era una ciencia puramente empírica. En cambio, ahora, en Hidráulica se empieza a emplear cada vez más, donde es posible y conveniente, el método de la hidromecánica teórica para la solución de determinados problemas, y ésta acude cada vez más a menudo al experimento como criterio de la autenticidad de sus conclusiones, es decir, la diferencia entre los métodos de estas dos ciencias poco a poco va desapareciendo y la frontera entre ellas, disminuyendo.

El método que emplea la hidráulica contemporánea en la investigación del movimiento de los líquidos consiste en lo siguiente: los fenómenos examinados primeramente se simplifican, se idealizan y se les aplica las leyes de la mecánica teórica. Después, los resultados obtenidos se comparan con los datos experimentales, se aclara el grado de divergencia entre éstos y se precisan y corrigen las deducciones teóricas y las fórmulas con el fin de adaptarlas a la aplicación práctica.

Una serie de fenómenos que, debido a su complejidad, se someten con extrema dificultad al análisis teórico, se estudian en la Hidráulica de un modo puramente experimental y los resultados de esta investigación se presentan en fórmulas empíricas. Por lo tanto, la Hidráulica es una ciencia semiempírica.

Al mismo tiempo, la Hidráulica es una ciencia aplicada o técnica, porque ha surgido de las necesidades prácticas y sus datos se emplean ampliamente en la técnica. La Hidráulica ofrece métodos de cálculo y de proyección de diversas obras hidrotécnicas (presas, canales, vertederos, conductos para llevar diferentes líquidos), de máquinas hidráulicas (bombas, turbinas hidráulicas, transmisiones hidráulicas), así como de otros dispositivos hidráulicos que se emplean en muchas ramas de la técnica.

El papel de la hidráulica en la construcción de máquinas es especialmente importante. Así, por ejemplo, en una fábrica moderna de construcción de máquinas podemos observar una vasta aplicación de la transmisión hidráulica en las máquinas herramienta y también el equipo hidráulico de forja y prensado, así como la utilización de la hidráulica en la fundición de metales y materiales plásticos, etc.

Una de las peculiaridades de la construcción contemporánea de aviones es el papel cada vez más creciente de diversos tipos de mecanismos hidráulicos del avión: transmisiones hidráulicas (sistemas hidráulicos), sistemas de combustión y de lubricación, hidroamortiguación neumática y otros.



## § 2. Breve ensayo histórico del desarrollo de la Hidráulica

El surgimiento de la Hidráulica como ciencia fue precedido por el descubrimiento de varias leyes y el estudio de ciertas cuestiones, referentes al equilibrio y al movimiento de los líquidos.

Leonardo da Vinci ya a fines del siglo XV se había ocupado con gran afición de trabajos hidrotécnicos. El escribió la obra *Sobre el movimiento del agua y las obras fluviales*, donde expuso sus observaciones y su experiencia en la construcción de obras hidrotécnicas en Milán, Florencia y otros lugares. En 1612 apareció el tratado de Galileo Galilei *Consideraciones sobre cuerpos que permanecen en el agua*, donde por primera vez fueron expuestos sistemáticamente los principios de la hidrostática. Un poco más tarde, en 1643, el discípulo de Galileo, Torricelli, descubrió la ley de derrame libre de los líquidos por los orificios. En el año 1650 fue descubierto el principio sobre la transmisión de la presión exterior en los líquidos, que es conocido como principio de Pascal. Una ley importante, aunque en forma aproximada, fue enunciada por Newton: la ley sobre el rozamiento en los líquidos en movimiento; él introdujo también, por primera vez, la noción de la viscosidad de los líquidos y sentó las bases de la teoría de la semejanza hidrodinámica.

Sin embargo, éstas eran solamente leyes aisladas y cuestiones no ligadas entre sí, y sólo surge como ciencia sobre el movimiento de los líquidos a mediados del siglo XVIII.

Las bases teóricas de la Hidromecánica y de la Hidráulica, como ciencia, fueron establecidas por Bernoulli y Euler a mediados del siglo XVIII.

Daniel Bernoulli (1700—1782) pertenecía a una distinguida familia suiza que dio 11 destacados sabios, principalmente matemáticos y mecánicos. Bernoulli pasó un largo período de su vida en Petersburgo, fue miembro numerario de la entonces joven Academia de Ciencias de Rusia, y más tarde, miembro honorario. Durante 50 años, de 1728 a 1778, Bernoulli publicó en las ediciones de la Academia de Ciencias de Rusia 47 obras sobre matemáticas, mecánica y otras ramas de la ciencia.

En 1738, en su tratado «Hidrodinámica, o apuntes sobre las fuerzas y el movimiento de los líquidos» Bernoulli formuló la ley principal del movimiento de los líquidos, la ecuación que relacionaba entre sí la presión, la velocidad y la altura en que se halla el líquido. Esta ecuación, que más tarde fue denominada ecuación de Bernoulli, puso los fundamentos no sólo de la Hidráulica, sino de toda la Hidromecánica.

El famoso matemático, físico y astrónomo Leonard Euler (1707—1783), oriundo de Suiza, vivió muchos años en Petersburgo y trabajó en la Academia de Ciencias de Rusia. En 1755 Euler creó las ecuaciones diferenciales generales del movimiento del líquido perfecto (no viscoso), la integración de las cuales da, en uno de los casos particula-

res, la ecuación de Bernoulli. De este modo fue fundado el método teórico en la Hidromecánica.

Además, Euler expuso la ecuación principal del trabajo de toda máquina hidráulica de paletas (turbinas, bombas centrífugas y ventiladores) y sentó las bases de la teoría de flotación de las naves.

En sus trabajos Euler mantenía contacto con el gran sabio ruso Mijaíl Lomonosov, experimentando, sin duda alguna, la influencia de su genio. Como es sabido, Lomonosov se ocupaba de problemas generales de la Física ligados directamente con las cuestiones del movimiento de los líquidos y gases, y también manifestaba gran interés por la hidráulica práctica.

Con los trabajos de Bernoulli, Euler y Lomonosov concluye el primer período del desarrollo de la Hidráulica: la creación de sus bases como ciencia. El segundo período de desarrollo, que abarca la segunda mitad del siglo XVIII y la mayor parte del siglo XIX, se caracteriza principalmente por la acumulación de datos experimentales sobre el fluido de los líquidos en cauces abiertos y cerrados, es decir, por la obtención de los coeficientes de corrección experimentales, con ayuda de los cuales se precisa la ley principal del movimiento de los líquidos: la ecuación de Bernoulli. En cuanto a las investigaciones teóricas de aquel período, es menester indicar que éstas se basaban en el concepto del líquido perfecto y no podían satisfacer todas las necesidades de la práctica, porque no tomaban en consideración una propiedad muy importante del líquido: su viscosidad.

El segundo período del desarrollo de la Hidráulica está ligado con los nombres de los conocidos investigadores Chezy, Darcy y Poiseuille en Francia, Weisbach y Hagen en Alemania, y otros. Particularmente minuciosas e importantes por su volumen eran las investigaciones experimentales de Weisbach (1806—1871); sus fórmulas empíricas se aplicaban hasta los últimos años.

Lagrange, Helmholtz, Saint Venant y otros eran destacados teóricos de la Hidromecánica de aquel período.

En el período siguiente de la historia de la Hidráulica, fin del siglo XIX y principios del siglo XX, se profundizan las bases teóricas de la Hidráulica al tomar en cuenta la viscosidad del líquido, el desarrollo de la teoría de la semejanza y el estudio de otras cuestiones que presentaban gran interés de principio y tenían una importancia directa para la práctica.

Este período de desarrollo de la Hidráulica, lo mismo que de otras disciplinas técnicas, fue condicionado por un crecimiento rápido de las fuerzas productivas y el auge de la técnica y está ligado con los nombres de los sabios G. Stokes (1819—1903), O. Reynolds (1842—1912), N. Zhukovski (1847—1921), N. Petrov (1836—1920) y otros.

Stokes estableció las bases de la teoría del movimiento de los líquidos tomando en cuenta la viscosidad, y resolvió otras cuestiones teóricas.



A Reynolds le pertenece el mérito de haber establecido el criterio de la semejanza hidrodinámica que permitió generalizar y sistematizar un gran material experimental que la Hidráulica ya había acumulado. Además, Reynolds inició el estudio teórico del régimen más complicado de la corriente: el turbulento.

El sabio ruso N. Petrov demostró con sus experiencias clásicas la justeza de la ley de Newton sobre el rozamiento en los líquidos, ley que en aquel tiempo era considerada como hipótesis, y, basándose en esta ley, elaboró la teoría hidrodinámica de lubricación de las máquinas, que jugó el papel principal en su desarrollo ulterior.

Para el desarrollo de la Hidráulica han tenido gran importancia las obras del eminente sabio ruso Nicolai Zhukovski. Antes de empezar a ocuparse de los problemas de la aerodinámica, es decir, en el primer período de su actividad científica multilateral y más fecunda (décadas del 80 y 90 del siglo pasado), N. Zhukovski publicó una serie de investigaciones sobre la Hidráulica que lo hicieron ya en aquel entonces universalmente conocido.

El trabajo más importante de Zhukovski en la Hidráulica es la investigación del llamado choque hidráulico en los tubos que era causa de gran número de averías en las cañerías. No sólo elaboró la teoría de este fenómeno complicado que surge al cerrar rápidamente los grifos, compuertas y reguladores, sino que llevó a cabo numerosos experimentos en la conducción de agua a Moscú que confirmaron su teoría y aseguraron su aplicación práctica. Este trabajo fue traducido poco tiempo después a otros idiomas y su teoría del choque hidráulico fue incluida en todos los manuales de Hidráulica.

Además, N. Zhukovski dio principio a la teoría del movimiento de las aguas subterráneas (teoría de la filtración); comenzó sus trabajos en este terreno también en relación con las necesidades del suministro de agua a la ciudad de Moscú; por primera vez, compuso las ecuaciones fundamentales sobre el movimiento de las aguas subterráneas y obtuvo resultados útiles para la práctica. Zhukovski resolvió también otros problemas hidráulicos: el derrame del líquido a través de orificios; la teoría de lubricación y la distribución de la velocidad del flujo de agua en los tubos. Analizó las cuestiones relacionadas con la reacción de chorros de líquidos y de las oscilaciones de los mismos; estableció la analogía entre las formaciones de olas en la superficie del líquido y los cambios de la compresión del aire a velocidades supersónicas, y otros.

Uno de sus discípulos escribe que Nicolai Zhukovski amó dedicarse a la Hidráulica durante toda su vida. De hecho, él es el fundador de la tendencia en la Hidráulica de unir, de un modo racional, la teoría con el experimento. Zhukovski llevaba las investigaciones hasta resultados aplicables en la ingeniería.

Esta conjugación de los métodos de la hidromecánica teórica y de la hidráulica experimental y la tendencia cada vez mayor a unir las

dos disciplinas, antes independientes y distintas por sus métodos, constituye la particularidad de la hidráulica contemporánea.

Hablando de la etapa presente del desarrollo de esta ciencia es necesario citar los nombres de sabios tales como L. Prandtl, T. Karman e I. Nikuradze. Prandtl y Karman, conocidos gracias a sus obras en la aerohidromecánica, han hecho un aporte sustancial en el desarrollo de la teoría de las corrientes turbulentas. El investigador Nikuradze, que colabora con ellos, hizo una serie de investigaciones de laboratorio, referentes a la corriente de líquidos en tubos, cuyos resultados han adquirido amplia notoriedad.

La edificación de potentes plantas hidroeléctricas, de grandiosos canales y oleoductos y el desarrollo de la construcción de máquinas hidráulicas, planteaba ante los hombres de ciencia soviéticos y los ingenieros especialistas en Hidráulica, nuevos y nuevos problemas y les hacía resolver problemas científicos y técnicos que imponía la práctica.

En la elaboración de la teoría y del cálculo de obras hidrotécnicas han jugado un importante papel las obras del sabio soviético, académico N. Pavlovski, uno de los creadores de la escuela de especialistas en Hidráulica de la URSS. Las numerosas obras de N. Pavlovski sobre las diversas ramas de la Hidráulica y, principalmente, sobre los cauces abiertos y la teoría de filtración son una aportación muy valiosa a la ciencia.

Grandes méritos en el desarrollo de la Hidráulica soviética pertenecen al académico L. Leibenson y a sus discípulos. Sus trabajos se refieren esencialmente a la hidráulica de los líquidos de alta viscosidad, a la hidráulica del petróleo y a la teoría de la filtración (hidráulica subterránea).

Los eminentes hombres de ciencia soviéticos, los académicos S. Chaplignin, A. Kolmogorov y S. Jristianovich, los profesores A. Ajutin, I. Agroskin, M. Velikanov, L. Loitsianski, M. Chertousov, I. Charni y otros han hecho grandes aportaciones científicas a las diferentes partes de la hidráulica general y a sus ramas especiales.

Las realizaciones de los sabios e ingenieros soviéticos en la construcción de máquinas hidráulicas tienen también gran importancia. La construcción de turbinas hidráulicas en la URSS, parte integrante de la hidroenergética, ha obtenido su máximo desarrollo bajo la dirección de los profesores I. Voznesenski, N. Kovalev e I. Kukolevski.

Las turbinas hidráulicas creadas para las plantas hidroeléctricas más grandes del mundo pueden servir de ejemplo del alto nivel de desarrollo de esta rama de la técnica soviética.

Otro ejemplo del auge de la ciencia y técnica soviéticas lo representa el feliz lanzamiento de los «sputniks» artificiales de la Tierra y de los cohetes cósmicos. Para colocarlos en órbita fueron necesarios potentes cohetes de varias etapas en cuya construcción tuvieron que trabajar tenazmente los sabios e ingenieros de diferentes especialidades, incluyendo a los de Hidráulica.



### § 3. Fuerzas que actúan sobre el líquido. Presión en el líquido

En Hidráulica el líquido se considera como un medio continuo que llena el espacio sin vacíos e intersticios, es decir, como una continuidad. Por eso, en Hidráulica se hace abstracción de la estructura molecular de la sustancia, y, las partículas del líquido, inclusive las infinitamente pequeñas, se consideran compuestas de gran número de moléculas.

Debido a la fluidez del líquido, o sea, a la movilidad de sus partículas, en él no pueden obrar fuerzas concentradas y solamente es

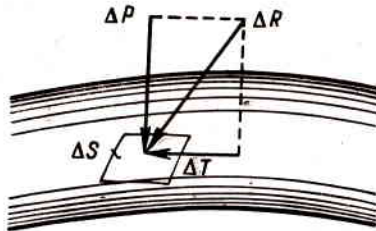


Fig. 1. Descomposición de la fuerza superficial en dos componentes

posible la acción de fuerzas continuamente distribuidas en su volumen (masa) o por su superficie. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre los volúmenes dados del líquido y que son respecto a éstos fuerzas exteriores, se subdividen en las de masa (volumétricas) y las superficiales.

Las fuerzas *de masa* son proporcionales a la masa del cuerpo líquido o, para líquidos homogéneos, a su volumen. Estas, ante todo, son la fuerza de gravedad y, después, las de inercia del movimiento de traslación, que actúan sobre el líquido que, hallándose en un reposo relativo, es trasladado en sus recipientes con un movimiento acelerado o que se halla en movimiento relativo en los cauces, que se desplazan con determinada aceleración.

Son también fuerzas de masa las que se incluyen para el examen, según el principio de D'Alembert, al componer las ecuaciones del movimiento del líquido.

Las fuerzas *superficiales* están continuamente distribuidas por la superficie del líquido y son proporcionales al área de la misma (si su distribución es uniforme). Estas fuerzas están condicionadas por la acción directa de los volúmenes contiguos del líquido sobre el volumen dado o por la de otros cuerpos (sólidos o gaseosos) que tienen contacto con el cuerpo líquido estudiado.

En el caso general, la fuerza superficial  $\Delta R$ , que actúa sobre la superficie  $\Delta S$ , está dirigida bajo cierto ángulo respecto a ésta; la fuerza  $\Delta R$  se puede descomponer en sus componentes: la normal  $\Delta P$  y la tangencial  $\Delta T$  (fig. 1). El primer componente se denomina fuerza de presión, el segundo, fuerza de rozamiento.

En Hidromecánica tanto las fuerzas de masa como las superficiales se estudian generalmente como fuerzas relacionadas con las unidades correspondientes. Las fuerzas de masa se relacionan con la unidad de masa, y las superficiales, con la unidad de superficie.

Puesto que toda fuerza de masa es igual al producto de la masa por la aceleración, en cada caso la fuerza de masa será, por consiguiente, numéricamente igual a la aceleración correspondiente.

La fuerza superficial, que se denomina *tensión de la fuerza superficial*, lo mismo que cualquier otra fuerza, se descompone en tensiones normal y tangencial.

La tensión normal, o sea, la de la fuerza de presión, se denomina *presión hidromecánica* (y en reposo, hidrostática), o bien simplemente *presión* y se designa con la letra  $p$ .

Si la fuerza de presión  $\Delta P$  está uniformemente distribuida por la superficie  $\Delta S$  o si se quiere determinar el valor medio de la presión hidromecánica, se emplea la fórmula

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S} \text{ [kg/m}^2\text{]}. \quad (1.1)$$

En el caso general, la presión hidromecánica en un punto dado es igual al límite, al que tiende la relación entre la fuerza de presión y la superficie sobre la cual aquélla actúa, cuando el valor de la superficie tiende a cero, es decir, al contraerse ésta a un punto:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}. \quad (1.2)$$

Si la presión  $p$  se calcula a partir de cero, entonces se denomina absoluta; si se calcula desde la atmosférica, se denomina excesiva o manométrica. Por consiguiente, la presión absoluta es igual a la atmosférica más la manométrica, o sea

$$p_{\text{abs.}} = p_A + p_{\text{man.}}$$

En la técnica como unidad de presión se ha adaptado la atmósfera técnica, igual a

$$1 \text{ at. técn.} = 1 \text{ kg/cm}^2 = 10.000 \text{ kg/m}^2.$$

La tensión tangencial en el líquido, o sea, la tensión de rozamiento se designa con la letra  $\tau$  y se expresa lo mismo que la presión,

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S}. \quad (1.3)$$

### § 4. Propiedades principales de los líquidos

La Hidráulica trata principalmente de los líquidos, por eso, es necesario examinar sus principales propiedades físicas.

Adoptemos la siguiente terminología y designaciones: *Peso específico o volumétrico* y designa el peso de la unidad del volumen del



líquido, o sea

$$\gamma = \frac{G}{W} [kg/m^3], \quad (1.4)$$

donde  $G$  es el peso del líquido;

$W$  es el volumen del líquido.

Por lo tanto, el peso específico es una magnitud y su valor numérico dependerá de las unidades con las que lo expresemos.

Por ejemplo, para el agua a  $4^\circ C$  tenemos

$$\gamma = 1.000 \text{ kg/m}^3 = 0,001 \text{ kg/cm}^3.$$

Llamaremos *densidad*  $\rho$  a la masa del líquido contenida en la unidad del volumen, o sea

$$\rho = \frac{M}{W} [kg \cdot \text{seg}^2/m^4], \quad (1.5)$$

donde  $M$  es la masa del líquido en el volumen  $W$ .

La relación entre el peso específico  $\gamma$  y la densidad  $\rho$  es fácil de hallar si se toma en cuenta que  $G = gM$ ; así tendremos

$$\rho = \frac{G}{gW} = \frac{\gamma}{g}. \quad (1.6)$$

Si el líquido no es homogéneo, las fórmulas (1.4) y (1.5) determinan sólo el valor medio del peso específico y de la densidad. Para determinar el verdadero valor de  $\gamma$  y  $\rho$  en el punto dado es necesario examinar el volumen que tiende a cero y buscar el límite de la relación correspondiente.

Se emplea también la noción de *peso específico relativo del líquido*,  $\delta$ , igual a la relación entre el peso específico del líquido y el del agua a  $4^\circ C$ , o sea

$$\delta = \frac{\gamma_{\text{liq.}}}{\gamma_{\text{agua}}}. \quad (1.7)$$

Analicemos brevemente las siguientes propiedades físicas de los líquidos: compresibilidad, dilatación térmica, resistencia a la tensión, viscosidad y evaporación.

1. La *compresibilidad*, o propiedad del líquido de cambiar su volumen bajo la acción de la presión, se caracteriza por el coeficiente de la compresión volumétrica  $\beta_p$ , que representa el cambio relativo del volumen que corresponde a la unidad de presión, o sea

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dp} \text{ cm}^2/kg. \quad (1.8)$$

El signo «menos» en la fórmula significa que al incremento positivo de la presión  $p$  le corresponde el negativo (es decir, la reducción) del volumen  $W$ .

La magnitud inversa del coeficiente  $\beta_p$  es el módulo volumétrico de elasticidad  $K$ . Expresando el volumen por medio de la densidad,

en lugar de (1.8) tendremos

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho} [kg/cm^2].$$

Para los líquidos el módulo  $K$  aumenta muy poco al elevarse la temperatura y la presión. Así, por ejemplo, para el agua éste aumenta desde  $K = 18.900 \text{ kg/cm}^2$  con  $t = 0^\circ C$  y  $p = 5 \text{ kg/cm}^2$  hasta  $K = 22.170 \text{ kg/cm}^2$  con  $t = 20^\circ C$  y  $p = 5 \text{ kg/cm}^2$ ; por término medio se puede tomar  $K = 20.000 \text{ kg/cm}^2$ . Por consiguiente, al aumentar la presión en  $1 \text{ kg/cm}^2$  el volumen del agua disminuye en  $1/20\,000$ , es decir, de un modo insignificante. El módulo de elasticidad para otros líquidos es muy parecido.

Por eso, en la mayoría de los casos se puede considerar que los líquidos son prácticamente incompresibles, es decir, su peso volumétrico  $\gamma$  no depende de la presión.

2. La *dilatación térmica* se caracteriza por el coeficiente  $\beta_t$  que representa el cambio relativo del volumen al aumentar la temperatura en  $1^\circ C$ , o sea

$$\beta_t = \frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dt}. \quad (1.9)$$

Para el agua el coeficiente  $\beta_t$  crece con el aumento de la presión y de la temperatura desde  $14 \cdot 10^{-6}$  a  $0^\circ C$  y  $1 \text{ kg/cm}^2$  hasta  $700 \cdot 10^{-6}$  a  $100^\circ C$  y  $100 \text{ kg/cm}^2$ .

Para los derivados del petróleo el coeficiente  $\beta_t$  es de 1,5 a 2 veces mayor que para el agua.

3. La *resistencia a la tensión* en el interior de los líquidos es ínfima; así, para la distensión del agua es suficiente la tensión de  $0,00\,036 \text{ kg/cm}^2$ , siendo aún menor con el aumento de la temperatura. Si la presión es de corta duración es posible una resistencia algo mayor. Habitualmente se considera que en los líquidos no puede haber tensiones distensionales.

En la superficie del líquido obran fuerzas de tensión superficial que tienden a comunicar al volumen del líquido una forma esférica y provocan cierta presión complementaria en el mismo. Sin embargo, esta presión se manifiesta de un modo sensible solamente en casos de dimensiones pequeñas del recipiente que contiene al líquido. En los tubos de pequeño diámetro dicha presión complementaria produce el ascenso (o descenso) del líquido respecto al nivel normal, lo que se llama capilaridad.

La altura de ascenso del líquido  $h$  en un tubo de cristal de diámetro  $d$  se determina por la fórmula

$$h = \frac{k}{d} [mm], \quad (1.10)$$

donde  $k$  tiene los siguientes valores en  $\text{mm}^2$ : para el agua,  $+30$ , para el mercurio,  $-14$ , para el alcohol,  $+12$ .



Las tres propiedades de los líquidos reales que acabamos de analizar no son sustanciales en la Hidráulica, ya que suelen manifestarse en grado muy reducido. Mucho más importante es la cuarta propiedad del líquido, la viscosidad.

4. La *viscosidad* es la propiedad del líquido de oponerse al desplazamiento o al resbalamiento de sus capas. Esta propiedad se manifiesta en que dentro del líquido, en condiciones determinadas, surgen tensiones tangenciales. La viscosidad es la propiedad inversa a la

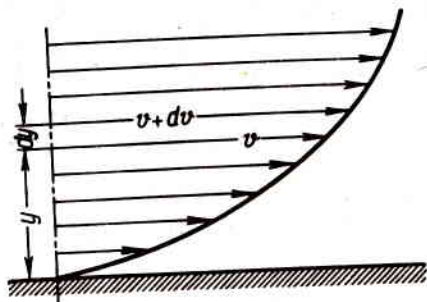


Fig. 2. Perfil de velocidades durante el flujo del líquido viscoso a lo largo de la pared

fluidez; los líquidos con mayor viscosidad (glicerina, aceites de lubricación y otros) son menos fluidos, y viceversa.

Al fluir el líquido viscoso a lo largo de una pared sólida, la corriente es frenada por la viscosidad (fig. 2). La velocidad de traslación de las capas  $v$  disminuye a medida que se reduce la distancia hasta la pared  $y$ , llegando a ser  $v = 0$ , cuando  $y = 0$ , mientras que entre las capas tiene lugar un deslizamiento que va acompañado por el surgimiento de tensiones tangenciales (tensiones de rozamiento).

Conforme a la hipótesis enunciada por primera vez por Newton en 1686, y más tarde demostrada experimentalmente por el profesor N. Petrov en 1883, la tensión tangencial en el líquido depende de la clase de éste y del carácter de la corriente. Si ésta es laminar, cambia en proporción directa al gradiente transversal de la velocidad, es decir

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} [kg/m^2], \quad (1.11)$$

donde  $\mu$  es el *coeficiente dinámico de viscosidad* del líquido;  $dv$  es el incremento de la velocidad correspondiente al de la coordenada  $dy$  (véase la fig. 2.)

El gradiente transversal de la velocidad  $dv/dy$  determina el cambio de velocidad que corresponde a la unidad de longitud en dirección  $y$ , y, por consiguiente, caracteriza la intensidad de desplazamiento de las capas del líquido en el punto dado.

En caso de que en la superficie  $S$  la tensión tangencial sea constante, la fuerza tangencial total (fuerza de rozamiento) que actúa sobre

esta superficie será

$$T = \mu \frac{dv}{dy} S. \quad (1.12)$$

Para determinar la dimensión del coeficiente de viscosidad resolvamos la ecuación (1.11) respecto a  $\mu$ . Tendremos

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} [kg \cdot seg/m^2].$$

La unidad de viscosidad en el sistema CGS es un *poise*, igual a  $1 \text{ poise} = 1 \text{ dina} \cdot \text{seg}/\text{cm}^2$ .

Puesto que  $1 \text{ kg (fuerza)} = 981.000 \text{ dinas}$  y  $1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$ , tenemos

$$1 \text{ poise} = \frac{1}{98,1} [kg \cdot seg/m^2].$$

Junto con el coeficiente dinámico de viscosidad  $\mu$  se emplea también el *coeficiente cinemático de viscosidad*  $\nu$  igual a

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} [m^2/seg]. \quad (1.13)$$

La falta de la dimensión de la fuerza ( $kg$ ) en este valor ha servido de motivo para llamarlo coeficiente cinemático de viscosidad.

Como unidad del coeficiente cinemático de viscosidad se emplea el *stoke*,

$$1 \text{ stoke} = 1 \text{ cm}^2/\text{seg}.$$

La viscosidad de los líquidos depende mucho de la temperatura, disminuyendo aquélla con el aumento de esta última (fig. 3). En cuanto a los gases, su viscosidad, al contrario, crece con el aumento de la temperatura. Esto se explica por la diferencia de la naturaleza de la viscosidad en los líquidos y en los gases.

En los líquidos una molécula está mucho más próxima a la otra que en los gases, y, puesto que en ellos la viscosidad se debe a las fuerzas de adhesión molecular, con el aumento de la temperatura, estas fuerzas disminuyen, por lo cual la viscosidad disminuye.

En los gases la viscosidad está condicionada por el movimiento térmico caótico de las moléculas, cuya intensidad aumenta al elevarse la temperatura. Por eso, la viscosidad de los gases crece al aumentar la temperatura.

La alteración del coeficiente de viscosidad  $\mu$  de los líquidos y gases con el cambio de la presión es tan insignificante, que por lo común no se toma en cuenta. Estas variaciones se toman en consideración solamente cuando las presiones en los líquidos son muy altas.

De tal modo, la tensión de rozamiento en los líquidos se puede considerar también independiente de la presión absoluta.



De la ley del rozamiento (1.11) se desprende que las tensiones de rozamiento son posibles solamente en un líquido en movimiento, es decir, la viscosidad del líquido se manifiesta exclusivamente durante su flujo. En los líquidos en reposo las tensiones tangenciales son iguales a cero.

Todo lo expuesto permite hacer la conclusión de que el rozamiento en los líquidos, condicionado por la viscosidad, está subordinado

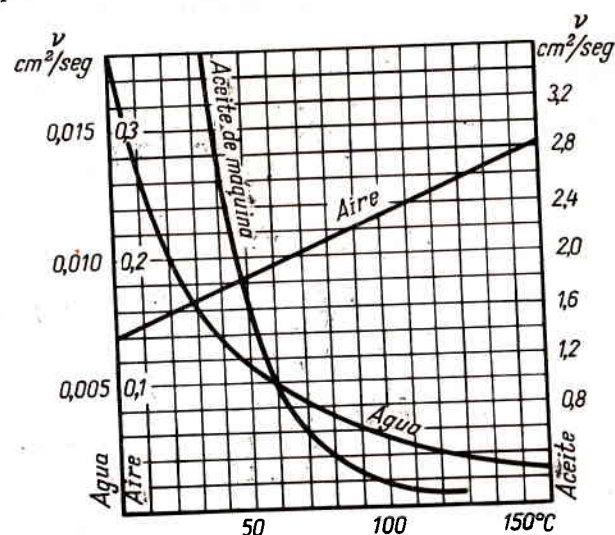


Fig. 3. Gráfica del coeficiente de viscosidad  $\nu$  en función de la temperatura

a una ley de rozamiento que se distingue radicalmente de la de los cuerpos sólidos.

5. La vaporización es propia a todo líquido, pero su intensidad es diferente para diversos líquidos y depende de las condiciones en las cuales se encuentra el líquido.

Uno de los índices que caracteriza la evaporación del líquido es la temperatura de su ebullición, a la presión atmosférica normal. Cuanto más alta es la temperatura de ebullición, tanto menor es la evaporación del líquido. En los sistemas hidráulicos de aviación la presión atmosférica normal es sólo un caso particular; frecuentemente hay que enfrentarse con la evaporación, a veces, con la ebullición de líquidos en recipientes cerrados a diferentes temperaturas y presiones. Por lo cual, conviene adoptar como característica más completa de la evaporación, aunque ésta no sea absoluta, la presión (elasticidad) de vapor saturado  $p_t$ , dada en función de la temperatura. Cuanto mayor sea la presión del vapor saturado a la temperatura dada, tanto mayor será la evaporación del líquido. Con el aumento de la

Tabla 1  
Propiedades físicas principales de algunos líquidos que se emplean en la técnica de aviación y cohetes

Denominación del líquido	Peso relativo $\delta$	Viscosidad $\nu$ en centistokes a la temperatura $t$						Presión del vapor $p_t$ en mm c. m.			Módulo volumétrico de elasticidad $K$ en $\text{kg}/\text{cm}^2$	
		+70° C	+50° C	+20° C	0° C	-20° C	-50° C	+60° C	+40° C	+20° C		
Gasolina de aviación B95/130	0,750	—	0,54	0,73	0,93	1,26	2,60	—	195	90	13.300	
Keroseno T-1	0,800— 0,850	1,2	1,5	2,5	4,0	8,0	25	59	27	11,5	13.000	
Keroseno T-2	0,775	—	—	1,05	2,0	—	5,5	—	100	—	13.000	
Aceite MC-20	0,895	65	155	1.100	10.100	solidifica		—	—	—	13.300	
Aceite MK-8	0,885	—	8,3	30	—	498	—	—	—	—	—	
Líquido para hidrosistemas AMF-10	0,850	7,5	10	16	42	130	1.250	—	—	—	—	
Acido nítrico (98%)	1,510	0,30	0,38	0,58	0,70	0,83	1,72	355	156	60	—	
Alcohol etílico	0,790	—	—	1,52	—	—	6,5	352	135	44	—	
Agua oxigenada (80%)	1,34	—	—	0,95	1,42	—	—	61,4	56,7	46,4	—	
Oxígeno líquido	1,15—	$t$	-175° C	-184° C	-190° C	-200° C	-204° C	$t$	-140° C	-160° C	190° C	-200° C
	1,25	$\nu$ centistokes	0,125	0,170	0,193	0,257	0,297	$p_{tat}$	21	7	0,45	0,11



temperatura, la presión  $p_t$  crece, pero en diferente grado para diversos líquidos.

Si para un líquido simple dado la función  $p_t = f(t)$  es fija, para los líquidos compuestos, que son mezclas de varios componentes (gasolina y otros), la presión  $p_t$  depende no sólo de sus propiedades

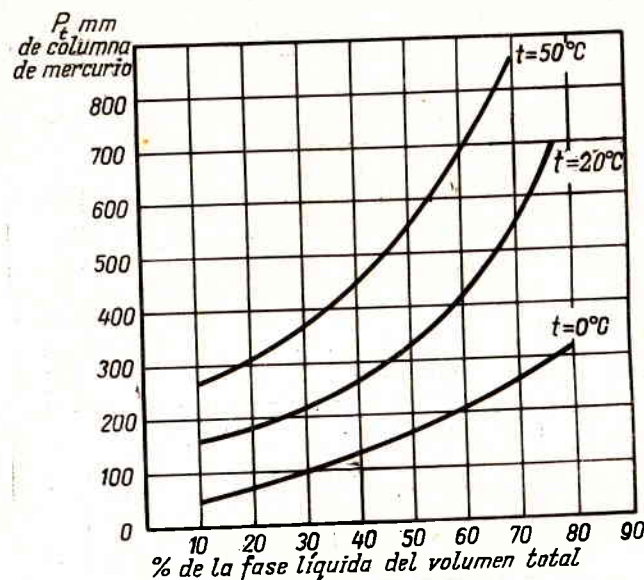


Fig. 4. Presión de vapor de la gasolina en función de la relación de la fase y de la temperatura

físicas y químicas y de la temperatura, sino también de la correlación de los volúmenes de las fases líquida y de vapor. La presión del vapor saturado crece con el aumento de la parte del volumen ocupado por la fase líquida. Como ejemplo, en la fig. 4 se muestra la dependencia de la presión del vapor saturado de gasolina de la correlación de las fases líquida y de vapor para tres valores de la temperatura.

Las principales propiedades físicas de algunos líquidos que se utilizan en la técnica de aviación y en cohetes están expuestas en la tabla 1.

## 2

### Hidrostática

#### § 5. Propiedades de la presión hidrostática

Como ya se ha indicado más arriba, dentro de los líquidos en reposo es posible solamente una forma de tensión: la de compresión, es decir, la presión hidrostática.

Es necesario tener en cuenta las siguientes dos propiedades de la presión hidrostática en los líquidos.

1. La presión hidrostática en la superficie exterior del líquido está siempre dirigida según la normal al interior del volumen del líquido que se examina.

Esta propiedad se desprende directamente del postulado de que dentro de un líquido en reposo solamente son posibles tensiones de compresión y no se producen las de extensión y tangenciales.

Es imposible una dirección de la presión hidrostática diferente a la normal, porque esto conduciría al surgimiento de las componentes de extensión o tangenciales.

Por superficie exterior del líquido se entiende la de volúmenes elementales que mentalmente segregamos del volumen total del líquido.

2. La presión hidrostática en cualquier punto interior del líquido es igual en todas las direcciones, es decir, la presión no depende del ángulo de inclinación de la superficie sobre la que actúa.

Para demostrar esta propiedad tomemos en un líquido en reposo un volumen elemental en forma de tetraedro rectangular con aristas paralelas a los ejes de coordenadas e iguales a  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  respectivamente (fig. 5).

Supongamos que una unidad de fuerza de masa, cuyos componentes son iguales a  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , actúa sobre el líquido cerca del volumen elegido.

Designemos con  $p_x$  la presión hidrostática que actúa sobre la cara normal al eje  $ox$ , con  $p_y$ , la presión que actúa sobre la cara normal al eje  $oy$ , etc. Designemos con  $p_n$  la presión hidrostática que actúa sobre la cara inclinada, y la superficie de esta cara con  $dS$ . Todas estas presiones están dirigidas según las normales a las caras respectivas.



Compongamos la ecuación de equilibrio del volumen segregado de líquido primeramente en la dirección del eje  $ox$ .

La proyección de las fuerzas de presión sobre el eje  $ox$  es igual a

$$P_x = p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n dS \cos(\widehat{n, x}).$$

La masa del tetraedro es igual al producto de su volumen por la densidad, o sea, a  $1/6 dx dy dz \rho$ ; por consiguiente, la fuerza de masa

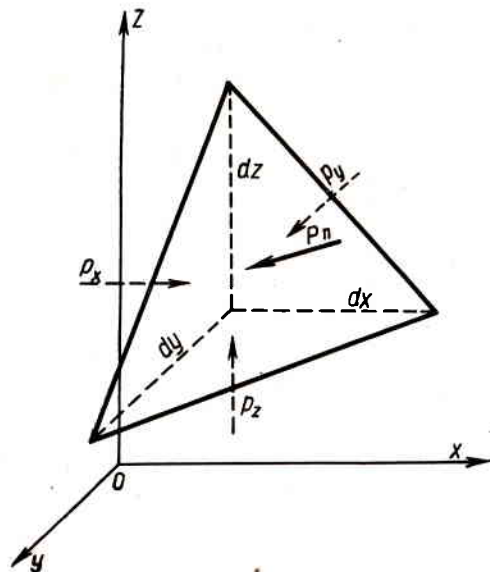


Fig. 5. Representación de las propiedades de la presión hidrostática

que actúa sobre el tetraedro a lo largo del eje  $ox$  es igual a

$$M = \frac{1}{6} dx dy dz \rho X.$$

La ecuación de equilibrio del tetraedro será

$$\frac{1}{2} dy dz p_x - p_n dS \cos(\widehat{n, x}) + \frac{1}{6} dx dy dz \rho X = 0.$$

Dividiendo cada término de esta ecuación por la superficie  $1/2 dy dz$ , que representa la proyección de la cara inclinada  $dS$  sobre el plano  $yOz$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} dy dz = dS \cos(\widehat{n, x}).$$

De donde

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} dx \rho X = 0.$$

Si las dimensiones del tetraedro van disminuyendo hasta cero, el último término de la ecuación que contiene el factor  $dx$  también irá disminuyendo hasta cero, permaneciendo las presiones  $p_x$  y  $p_n$  como magnitudes finitas.

Por consiguiente, en el límite obtendremos

$$p_x - p_n = 0.$$

o bien

$$p_x = p_n.$$

Componiendo de un modo análogo ecuaciones de equilibrio a lo largo de los ejes  $oy$  y  $oz$ , después de razonamientos semejantes se tendrá

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n,$$

o bien

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (2.1)$$

Puesto que las dimensiones del tetraedro  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  han sido elegidas a voluntad, la inclinación de la superficie  $dS$  es también a voluntad y, por consiguiente, al reducirse el tetraedro a un punto, la presión sobre éste será idéntica en todas las direcciones.

También se puede demostrar fácilmente este postulado basándose en las fórmulas de la resistencia de materiales para las tensiones en el caso de compresión en dos y tres direcciones mutuamente perpendiculares<sup>1)</sup>. Para esto basta dar un valor igual a cero a la tensión tangencial en las fórmulas indicadas y tendremos

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Estas dos propiedades de la presión hidrostática dentro del líquido en reposo también tienen lugar dentro del líquido perfecto en movimiento. Pero durante el movimiento de líquidos reales surgen tensiones tangenciales que no se han tomado en consideración en la deducción expuesta, y, por consiguiente, la presión hidromecánica en los líquidos reales, en rigor, no posee las propiedades indicadas.

## § 6. Ecuación fundamental de la hidrostática

Examinemos el caso principal del equilibrio del líquido, cuando, de todas las fuerzas de masa sobre el líquido, actúa solamente la gravedad, y obtendremos para este caso la ecuación que permite hallar el valor de la presión hidrostática en cualquier punto del volumen examinado de líquido. La superficie libre del líquido en este caso, como se sabe, es un plano horizontal.

<sup>1)</sup> Estas fórmulas son:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi; \quad \tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi.$$



Supongamos que el líquido se halla en un recipiente (fig. 6) y sobre su superficie libre actúa la presión  $p_0$ . Hallemos el valor de la presión hidrostática  $p$  en un punto  $M$  elegido a voluntad, situado a la profundidad  $h$ .

Tomemos en el punto  $M$ , como centro, una superficie elemental horizontal  $dS$  y construyamos sobre ésta un volumen cilíndrico vertical de altura  $h$ . Analicemos la condición de equilibrio del mencionado volumen de líquido segregado de su masa total. La presión

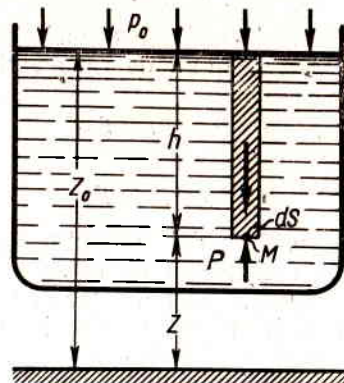


Fig. 6. Para la deducción de la ecuación hidrostática fundamental

del líquido sobre la base inferior del cilindro será la presión exterior y orientada, según la normal, al interior del volumen, es decir, hacia arriba.

Haciendo el balance de fuerzas que actúan en sentido vertical sobre el volumen que se examina, tendremos

$$p dS - p_0 dS - \gamma h dS = 0,$$

donde el tercer término del primer miembro representa el peso del líquido en el volumen indicado. Las fuerzas de presión sobre la superficie lateral del cilindro no formarán parte de la ecuación, ya que son normales a esta superficie.

Dividiendo por  $dS$  cada término y despejando  $p$ , tendremos

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (2.2)$$

La ecuación obtenida se llama ecuación fundamental de la hidrostática con la cual se puede calcular la presión en cualquier punto del líquido en reposo. Esta presión, como se ve de la ecuación, consta de dos magnitudes: de la presión en la superficie libre del líquido  $p_0$  y de la condicionada por el peso de las capas del líquido situadas más arriba.

La magnitud  $p_0$  es igual para todos los puntos del volumen del líquido, por eso, tomando en consideración la segunda propiedad

de la presión hidrostática, se puede decir, que la presión aplicada a la superficie libre del líquido se transmite a todos los puntos del mismo y uniformemente en todas direcciones (principio de Pascal).

La presión del líquido, como se ve en la fórmula (2.2), crece al aumentar la profundidad, según la ley de la recta y, a una profundidad dada, es una magnitud constante.

La superficie, en la cual la presión es igual en todos sus puntos, se denomina *superficie de nivel*. En el caso dado, las superficies de nivel son los planos horizontales, y la superficie libre es una de las superficies de nivel.

Tomemos a una altura cualquiera un plano horizontal de comparación y construyamos verticalmente sobre él las coordenadas  $z$ . Sea  $z$  la coordenada del punto  $M$ ,  $z_0$ , la de la superficie libre del líquido y, sustituyendo en la ecuación (2.2)  $h$  por  $z_0 - z$ , tendremos

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma}.$$

Pero, puesto que el punto  $M$  está elegido a voluntad, se puede afirmar que para todo el volumen del líquido en reposo

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const.} \quad (2.3)$$

La coordenada  $z$  se denomina *altura de nivelación*. La magnitud  $\frac{p}{\gamma}$  tiene también dimensión lineal y se denomina *altura piezométrica*. La suma  $z + \frac{p}{\gamma}$  se denomina *empuje hidrostático*.

De este modo, el empuje hidrostático es una magnitud constante para todo el volumen del líquido en reposo.

Los mismos resultados se puede obtener con mayor exactitud mediante la integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio del líquido (véase el apéndice).

## § 7. Altura piezométrica. Vacío. Medición de la presión

La altura piezométrica igual a  $\frac{p}{\gamma}$  representa la altura de la columna de líquido dado correspondiente a la presión dada  $p$  (absoluta o manométrica). La altura piezométrica correspondiente a la presión manométrica se puede observar en el piezómetro, uno de los instrumentos más simples para medir la presión. El piezómetro es un tubo de vidrio dispuesto verticalmente, cuyo extremo superior se comunica con la atmósfera y el inferior está unido al volumen del líquido en que se mide la presión (fig. 7).

Aplicando la fórmula (2.2) al líquido contenido en el piezómetro tendremos

$$p_{\text{abs.}} = p_A + h_p \gamma,$$



donde  $P_{abs.}$  es la presión absoluta en el líquido al nivel de la inserción del piezómetro;

$P_A$  es la presión atmosférica.

La altura de ascenso del líquido en el piezómetro es igual a

$$h_p = \frac{p_{abs.} - p_A}{\gamma} = \frac{P_{man.}}{\gamma}, \quad (2.4)$$

donde  $P_{man.}$  es la presión manométrica en el nivel indicado.

Es evidente que, si sobre la superficie libre del líquido en reposo actúa la presión atmosférica, la altura piezométrica, para cualquier punto del volumen del líquido estudiado, es igual a la profundidad a que está situado este punto.

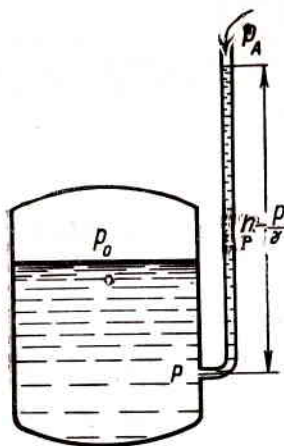


Fig. 7. Piezómetro acoplado al depósito

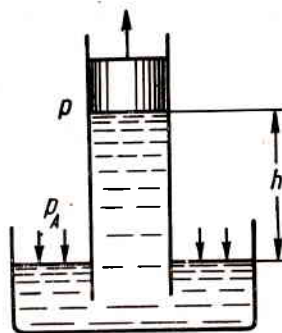


Fig. 8. Aspiración del líquido por un émbolo

La presión en los líquidos o gases, a menudo se expresa con el valor numérico de la altura piezométrica correspondiente a esta presión, según la fórmula (2.4).

Por ejemplo, a una atmósfera técnica le corresponden

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_{agua}} = \frac{10.000}{1.000} = 10 \text{ m de agua},$$

$$h_2 = \frac{p}{\gamma_{merc}} = \frac{10.000}{13.600} = 0,735 \text{ m de mercurio}.$$

Si la presión absoluta en el líquido o gas es menor que la atmosférica, entonces se dice que tiene lugar la *rarefacción* o *vacío*. La magnitud de rarefacción o vacío es igual a la diferencia entre la presión atmosférica y la absoluta, es decir

$$p_{vac.} = p_A - p_{abs.},$$

o bien

$$h_{vac.} = \frac{p_A - p_{abs.}}{\gamma}.$$

Tomemos, por ejemplo, un tubo con un pistón bien ajustado, hagamos bajar su extremo inferior en un recipiente con líquido y elevemos gradualmente el pistón (fig. 8). El líquido ascenderá detrás del pistón y se elevará a cierta altura  $h$  sobre la superficie libre a la presión atmosférica. Puesto que para los puntos dispuestos bajo el pistón,

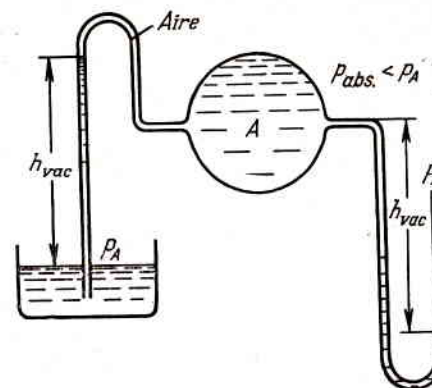


Fig. 9. Vacuómetros simples

la profundidad de su inmersión respecto a la superficie libre es negativa, según la ecuación (2.2) la presión absoluta del líquido bajo el pistón será igual a

$$p = p_A - h\gamma \quad (2.5)$$

y la magnitud del vacío

$$p_{vac.} = p_A - p = h\gamma,$$

o bien

$$h_{vac.} = \frac{p_A - p}{\gamma} = h.$$

A medida que se eleve el pistón, la presión absoluta del líquido bajo el pistón irá disminuyendo. El límite inferior para la presión absoluta en el líquido será igual a cero y la magnitud máxima del vacío será numéricamente igual a la presión atmosférica; por eso, si  $p = 0$  (más exactamente,  $-p = p_t$ ), la altura máxima de ascenso del líquido en el ejemplo citado, es decir, la altura máxima de la «aspiración» del líquido se determinará de la ecuación (2.5).

De este modo, sin contar con la elasticidad de los vapores  $p_t$ , tendremos

$$h_{max.} = \frac{p_A}{\gamma}.$$

Siendo la presión atmosférica normal ( $1,033 \text{ kg/cm}^2$ ), la altura  $h_{max.}$  es: para el agua, 10,33 m; para la gasolina, ( $\gamma = 750 \text{ kg/m}^3$ ) 13,8 m; para el mercurio, 0,760 m; etc.

El dispositivo más sencillo para medir el vacío es un tubo de cristal (fig. 9). El vacío en el volumen del líquido A puede medirse, bien



con la ayuda del tubo en U (en la parte derecha del dibujo), bien utilizando el tubo en U invertida, un extremo del cual está sumergido en el recipiente con el líquido (véase la parte izquierda del dibujo).

Para medir la presión de los líquidos y gases en condiciones de laboratorio, además de los piezómetros, se emplean distintos manómetros que se dividen en: de líquido y metálicos.

En la fig. 10 se muestran los esquemas de los manómetros de líquido. El manómetro en U (fig. 10, a) es un tubo de cristal que contiene mercurio. Para medir presiones insignificantes de gas, se emplea

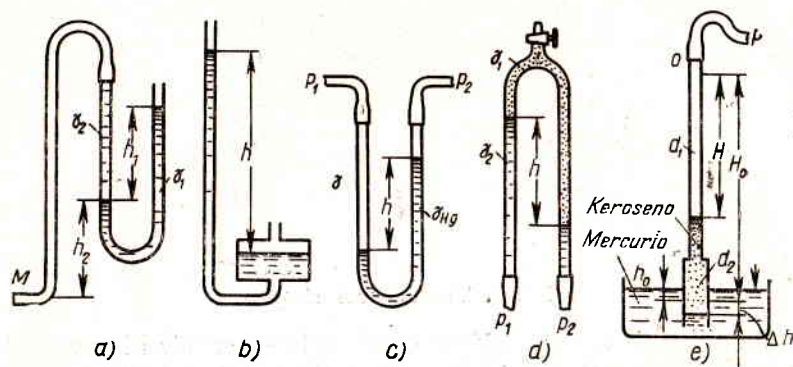


Fig. 10. Esquemas de manómetros de líquido

alcohol en vez de mercurio, agua y a veces tetrabromo de etano ( $\delta = 2,95$ ). Si se mide la presión de un líquido en el punto M y el tubo de unión contiene el mismo líquido, hace falta tener en cuenta la altura de la posición del manómetro respecto al punto M. Así, para la presión manométrica en el punto M tenemos

$$p_M = h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2.$$

El manómetro de cubeta (fig. 10, b) es más cómodo que el anterior, ya que al emplearlo hay que registrar solamente un nivel del líquido. Si el diámetro de la cubeta es suficientemente grande en comparación con el del tubo, se puede considerar invariable el nivel del líquido en la cubeta. Para medir con mayor precisión pequeñas presiones de gas se emplea el micromanómetro de cubeta con tubo inclinado. En este caso la longitud de la columna del líquido a medir aumenta en proporción inversa al seno del ángulo de inclinación del tubo y la precisión de medición es correspondientemente mayor.

Para medir la diferencia de presiones en dos puntos se emplean manómetros diferenciales, el más sencillo de los cuales es el manómetro en U (fig. 10, c). Si por medio de este manómetro, que contiene mercurio, se mide la diferencia de las presiones  $p_1$  y  $p_2$  en un líquido

con peso específico  $\gamma$  que llena por completo los tubos comunicantes, es fácil observar que

$$p_1 - p_2 = h (\gamma_{\text{merc.}} - \gamma).$$

Para medir cambios insignificantes de presión se utiliza el micro-manómetro de dos líquidos que es un tubo en U invertida, conteniendo aceite o keroseno en la parte superior (fig. 10, d). En este caso

$$p_1 - p_2 = h (\gamma_2 - \gamma_1)$$

El manómetro de cubeta de dos líquidos (fig. 10, e) está destinado para medir presiones o vacíos del aire en los límites aproximados de 0,1 a 0,5 at, es decir, cuando el manómetro de alcohol o de agua da una columna extremadamente alta y por eso no es cómodo su empleo, y el manómetro de mercurio no ofrece la precisión necesaria a causa de la altura insuficiente de su columna. Este manómetro se utiliza, por ejemplo, durante las experiencias en tubos aerodinámicos de velocidades.

La cubeta se llena de mercurio y el tubo, de alcohol, keroseno u otro líquido. Gracias a su poca evaporación resulta muy efectivo el keroseno.

Escogiendo correspondientemente los diámetros de los sectores superior e inferior del tubo ( $d_1$  y  $d_2$ ), se puede obtener cualquier peso específico efectivo ( $\gamma_{\text{ef.}}$ ), el cual es componente de la fórmula

$$p = H \gamma_{\text{ef.}}$$

donde  $p$  es la presión (o vacío) que se mide;

$H$  es la lectura del manómetro.

Hallemos la expresión para  $\gamma_{\text{ef.}}$  de las siguientes ecuaciones (véase la fig. 10, e): ecuación de equilibrio de las columnas de mercurio y de keroseno, siendo  $p = p_A$

$$H_0 \gamma_k = h_0 \gamma_{\text{merc.}};$$

la ecuación de equilibrio, siendo  $p > p_A$

$$p + (H_0 - H + \Delta h) \gamma_k = (h_0 + \Delta h) \gamma_{\text{merc.}};$$

la ecuación de los volúmenes (el del keroseno que se ha desplazado del tubo superior  $d_1$  al inferior  $d_2$ , es igual al del mercurio desalojado)

$$H d_1^2 = \Delta h d_2^2.$$

Sustituyendo y haciendo las transformaciones necesarias, se tiene

$$\gamma_{\text{ef.}} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \gamma_{\text{merc.}} + \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}\right) \gamma_k.$$

Por ejemplo, siendo  $d_2 = 2d_1$ , tenemos  $\gamma_{\text{ef.}} = 0,25 \times 13.600 + 0,75 \times 800 = 4.000$  kg/m<sup>3</sup>.

Para medir presiones mayores de 2 y 3 at, se emplean manómetros metálicos, de tubo flexible o de placa elástica. El principio de su



funcionamiento se basa en la deformación de un tubo flexible o placa elástica bajo la acción de la presión que se mide. Esta deformación se transmite por un mecanismo a la aguja, que indica en un cuadrante la presión.

En los aviones, los manómetros se utilizan para el control de la presión del combustible que llega a los inyectores del turbomotor a gas o al carburador del motor de pistón y también para controlar la presión del aceite en los conductos, etc.

El manómetro de aviación más usado actualmente es el eléctrico, raramente se emplean manómetros metálicos. En calidad de elemento sensible (captador) en el manómetro eléctrico se emplea una membrana. Bajo la acción de la presión que se mide, la membrana experimenta deformaciones y, a través del mecanismo de transmisión, desplaza el cursor del potenciómetro que, junto con el indicador, está conectado al sistema eléctrico.

### § 8. La fuerza de presión del líquido sobre una pared plana

Para hallar la fuerza de la presión total del líquido sobre una pared plana, a un ángulo  $\alpha$  en relación al horizonte (fig. 11) debemos aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática (2.2). Para calcular la

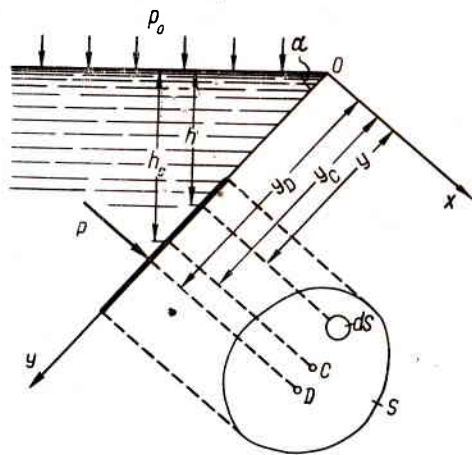


Fig. 11. Para la determinación de la fuerza de presión de un líquido sobre una pared plana (la pared se muestra en dos proyecciones)

fuerza total de la presión  $P$  que ejerce el líquido sobre un sector determinado de la pared con una superficie  $S$  y limitado por un contorno cualquiera, dirijamos el eje  $ox$  por la línea de intersección del plano de la pared con la superficie libre del líquido, y el eje  $oy$ , perpendicularmente a esta línea en el plano de la pared.

Expresemos primeramente la fuerza elemental de la presión aplicada a la superficie infinitesimal  $dS$ :

$$dP = p dS = (p_0 + h\gamma) dS = p_0 dS + h\gamma dS,$$

donde  $p_0$  es la presión sobre la superficie libre;

$h$  es la profundidad a que se halla la superficie  $dS$ .

Para determinar la fuerza total  $P$  efectuaremos la integración de toda la superficie  $S$ :

$$P = p_0 \int_S dS + \gamma \int_S h dS = p_0 S + \gamma \sin \alpha \int_S y dS,$$

donde  $y$  es la coordenada del centro de la superficie  $dS$ .

Por la mecánica sabemos que la última integral es el momento estático de la superficie  $S$  respecto al eje  $ox$  y es igual al producto de esta superficie por la coordenada de su centro de gravedad (punto  $C$ ), o sea

$$\int_S y dS = y_C S.$$

Por consiguiente,

$$P = p_0 S + \gamma \sin \alpha y_C S = p_0 S + \gamma h_C S$$

(aquí  $h_C$  es la profundidad a que se halla el centro de gravedad de la superficie  $S$ ), o

$$P = (p_0 + \gamma h_C) S = p_C S, \quad (2.6)$$

es decir, la fuerza total de presión del líquido sobre la pared plana es igual al producto de la superficie de la pared por el valor de la presión hidrostática en el centro de gravedad de esta superficie.

Si la presión  $p_0$  es atmosférica, la fuerza de la presión excesiva del líquido sobre la pared plana es igual a

$$P_{exc.} = h_C \gamma S = p_{C exc.} S. \quad (2.6')$$

Hallems ahora la posición del centro de gravedad, es decir, la coordenada del punto de intersección de la fuerza de presión del líquido sobre la pared con el plano de la pared.

Puesto que la presión exterior  $p_0$  se transmite uniformemente a todos los puntos de la superficie  $S$ , la resultante de esta presión estará aplicada en el centro de gravedad de la superficie  $S$ . Para hallar el punto de aplicación de la fuerza de la presión excesiva del líquido (punto  $D$ ), apliquemos la ecuación de la mecánica, que consiste en que, el momento de la fuerza resultante de presión respecto al eje



$ox$  es igual a la suma de los momentos de fuerzas componentes, o sea

$$P_{exc} \cdot y_D = \int_S y dP_{exc},$$

donde  $y_D$  es la coordenada del punto de aplicación de la fuerza  $P_{exc}$ .

Expresando  $P_{exc}$  y  $dP_{exc}$  por  $y_C$  e  $y$ , y determinando  $y_D$  tendremos

$$y_D = \frac{\gamma \sin \alpha \int_S y^2 dS}{\gamma \sin \alpha y_C S} = \frac{J_x}{y_C S},$$

donde  $J_x = \int_S y^2 dS$  es el momento de inercia de la superficie  $S$  respecto al eje  $ox$ .

Teniendo en cuenta que

$$J_x = J_{x_0} + y_C^2 S$$

( $J_{x_0}$  es el momento de inercia de la superficie  $S$  respecto al eje central, paralelo a  $ox$ ), obtendremos definitivamente

$$y_D = y_C + \frac{J_{x_0}}{y_C S}. \quad (2.7)$$

De este modo, el punto de aplicación de la fuerza  $P_{exc}$ , está debajo del centro de gravedad de la superficie de la pared, y la distancia entre ellos es igual a

$$\Delta y = \frac{J_{x_0}}{y_C S}.$$

Si la presión  $p_0$  es igual a la atmosférica y actúa sobre ambas caras de la pared, el punto  $D$  será precisamente el centro de presión. Pero cuando  $p_0$  es más alta, el centro de presión se encuentra, por reglas de la mecánica, como el punto de aplicación de la resultante de dos fuerzas:  $P_{exc}$  y  $p_0 S$ . Cuanto mayor sea la segunda fuerza en comparación con la primera, tanto más cerca estará el centro de presión del de gravedad de la superficie  $S$ .

Anteriormente ha sido determinada solamente una coordenada del centro de presión,  $y_D$ . Para la obtención de la otra coordenada,  $x_D$ , hace falta componer la ecuación de momentos respecto al eje  $oy$ .

En el caso particular, cuando la pared es rectangular y uno de sus lados coincide con la superficie libre del líquido, la posición del centro de presión se halla muy fácilmente. Puesto que la representación gráfica de la presión del líquido sobre la pared es un triángulo rectángulo (fig. 12), cuyo centro de gravedad se encuentra a  $1/3$  de la altura  $b$  del triángulo, el centro de presión del líquido también estará a  $1/3 b$ , contando desde abajo.

En la técnica de aviación se tropieza a menudo con la acción de la fuerza de presión del líquido sobre paredes planas, por ejemplo, sobre las de los pistones de distintas máquinas y dispositivos hidros-

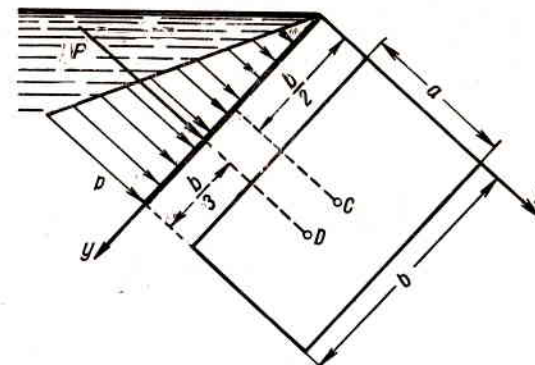


Fig. 12. Representación de la presión sobre una pared rectangular

táticos (véase ejemplos y el capítulo XIV); siendo en estos casos la presión  $p_0$  tan elevada, se puede considerar que el centro de presión coincide con el de gravedad de la superficie de la pared.

## § 9. La fuerza de presión del líquido sobre superficies cilíndricas y esféricas. Flotación de los cuerpos

La solución del problema de la presión del líquido sobre una superficie de diferente forma generalmente es bastante complicada, pues consiste en la determinación de tres componentes de la fuerza total y de tres momentos. Además, estos casos son muy raros en la práctica. Son más frecuentes los casos de superficies cilíndricas o esféricas con plano vertical de simetría. Cuando esto sucede, la presión del líquido se reduce a una fuerza resultante situada en el plano de simetría.

Tomemos una superficie cilíndrica  $AB$  con la generatriz perpendicular al plano del diseño (fig. 13), y determinemos la fuerza de presión del líquido sobre esta superficie cuando: a) el líquido se encuentre arriba y b) el líquido se encuentre abajo.

En el caso «a» limitemos el volumen del líquido aislador por la superficie  $AB$  con superficies verticales trazadas por los límites de este sector, y la superficie libre del líquido, es decir, el volumen  $ABCD$  y analicemos las condiciones de su equilibrio en los sentidos vertical y horizontal. Si el líquido actúa sobre la superficie  $AB$  con la fuerza  $P$ , la superficie  $AB$  ejerce sobre el líquido la misma presión  $P$ , pero en sentido contrario. En la fig. 13 se muestra esta fuerza de reacción descompuesta en dos componentes: horizontal  $P_h$  y vertical  $P_v$ .



La condición de equilibrio del volumen  $ABCD$  en el sentido vertical es:

$$P_v = p_0 S_h + G, \quad (2.8)$$

donde  $P_0$  es la presión sobre la superficie libre del líquido;  
 $S_h$  es la superficie de la proyección horizontal de la superficie  $AB$ ;  
 $G$  es el peso del volumen limitado del líquido.

Anotemos la condición de equilibrio del mismo volumen en el sentido horizontal, tomando en consideración que las fuerzas de

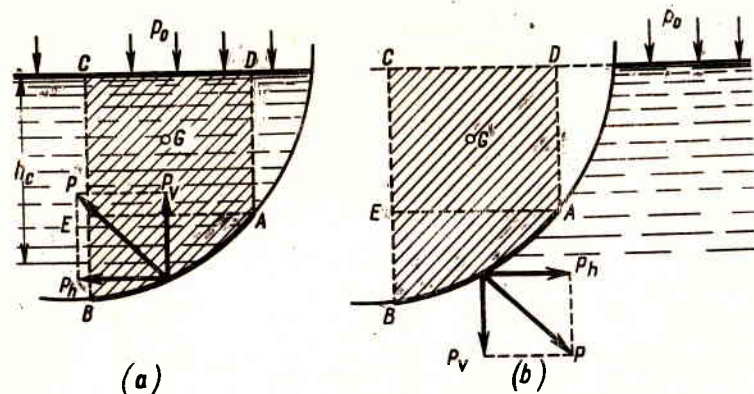


Fig. 13. Presión del líquido sobre la superficie lateral de un cilindro

presión del líquido sobre las superficies  $EC$  y  $AD$  se equilibran recíprocamente y queda solamente la fuerza de presión sobre la superficie  $BE$ , es decir, sobre la proyección vertical de la superficie  $AB$ , o sea,  $S_v$ . Tendremos

$$P_h = S_v \gamma h_c + p_0 S_v. \quad (2.9)$$

Determinando por las fórmulas (2.8) y (2.9) los componentes vertical y horizontal de la fuerza total de presión  $P$ , resulta

$$P = \sqrt{P_v^2 + P_h^2} \quad (2.10)$$

En el caso cuando el líquido se encuentra abajo (véase la fig. 13, b), la magnitud de la presión hidrostática en todos los puntos de la superficie  $AB$  tendrá los mismos valores que en el caso «a», pero en sentido contrario, y las fuerzas totales  $P_v$  y  $P_h$  se determinarán por las mismas fórmulas (2.8) y (2.9), pero con signos contrarios. Lo mismo que en el caso «a» la magnitud  $G$  es el peso del líquido en el volumen  $ABCD$ , aunque no esté lleno de líquido.

Se puede hallar fácilmente la posición del centro de presión en la pared cilíndrica si se sabe la magnitud y el sentido de las fuerzas  $P_v$  y  $P_h$ , es decir, si están determinados el centro de presión en la proyección vertical de la pared y el de gravedad del volumen escogido

$ABCD$ . La solución se facilita considerablemente cuando la superficie sea circular, porque, entonces, la fuerza resultante interseca el eje de la superficie. Esto se debe a que toda fuerza elemental de presión  $dP$  es normal a la superficie, es decir, está dirigida a lo largo del radio.

El método de la determinación de la fuerza de presión sobre superficies cilíndricas es también aplicable a las esféricas; en este caso, la fuerza resultante pasa también a través del centro de la superficie y se encuentra en el plano vertical de simetría.

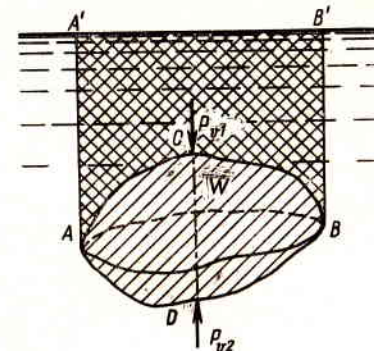


Fig. 14. Para la demostración del principio de Arquímedes

Aplicaremos el procedimiento descrito anteriormente para determinar la componente vertical de la fuerza de presión del líquido sobre la pared curvilínea y demostrar el conocido principio de Arquímedes.

Supongamos que en un líquido está sumergido un cuerpo de forma cualquiera y volumen  $W$  (fig. 14). Proyectemos este cuerpo sobre la superficie libre del líquido y tracemos la superficie de proyección del cuerpo representada por la curva cerrada, entre los puntos  $A$  y  $B$ . Esta curva separa la parte superior de la superficie del cuerpo  $ACB$  de su parte inferior  $ADB$ . La componente vertical de la fuerza de la presión excesiva del líquido sobre la parte superior de la superficie del cuerpo  $P_{v1}$  está orientada hacia abajo y es igual al peso del líquido en el volumen  $AA'B'BCA$ . La componente vertical de la fuerza de presión del líquido sobre la parte inferior de la superficie del cuerpo,  $P_{v2}$  está dirigida hacia arriba y es igual al peso del líquido en el volumen  $AA'B'BDA$ .

De esto se deduce que la resultante vertical de la fuerza de presión del líquido sobre el cuerpo estará orientada hacia arriba y es igual al peso del líquido en el volumen resultante de la diferencia de los dos volúmenes indicados, es decir, igual al volumen del cuerpo:

$$P_A = P_{v2} - P_{v1} = G_{ACBD} = W\gamma.$$

Precisamente en esto consiste el principio de Arquímedes, que se formula generalmente del modo siguiente: todo cuerpo su-



mergido en un líquido pierde en su peso tanto cuanto pesa el líquido desalojado por él. El principio de Arquímedes se cumple también para los cuerpos parcialmente sumergidos en el líquido.

La fuerza  $P_A$  se denomina *fuerza de Arquímedes* o *fuerza ascensional*, y el punto de su aplicación, es decir, el centro de gravedad del volumen  $W$ , *centro de desplazamiento* (*centro de carena*).

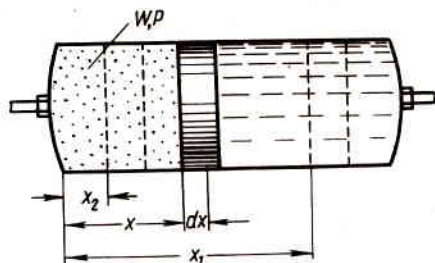


Fig. 15. Esquema del acumulador neumático hidráulico

Dependiendo de la correlación entre la fuerza del peso  $G$  del cuerpo y de la fuerza de Arquímedes  $P_A$  son posibles tres casos: 1)  $G > P_A$ , el cuerpo se hunde; 2)  $G < P_A$ , el cuerpo emerge; 3)  $G = P_A$ , el cuerpo flota.

Para el equilibrio de un cuerpo flotante, además de la igualdad de las fuerzas  $G = P_A$ , es necesario también que la suma de momentos sea igual a cero. Esta condición se observa cuando el centro de gravedad del cuerpo se encuentra en la misma vertical que el de desplazamiento (centro de carena). La estabilidad del equilibrio de los cuerpos flotantes no se examina en este libro.

**Ejemplo 1.** El acumulador neumohidráulico, que se emplea en los sistemas hidráulicos de aviones, se fabrica a menudo en forma de cilindro con émbolo, en una de cuyas partes se encuentra el aire bajo la presión  $p$ , y en otra, el líquido, que se comprime con la bomba (fig. 15) <sup>1)</sup>. Al cargarse el acumulador, la presión del líquido desplaza el émbolo hacia la izquierda y, comprimiendo el volumen del aire,  $W$ , crea una reserva de energía. Durante la descarga del acumulador se verifica la dilatación del aire y la entrega de la energía al consumidor.

Determinese la reserva de energía de que dispone el acumulador si se carga hasta la presión  $p_2 = 150 \text{ kg/cm}^2$ , y se descarga hasta la presión  $p_1 = 75 \text{ kg/cm}^2$ , a lo cual corresponde un volumen de aire  $W_1 = 3 \text{ l}$ .

Para resolverlo admitamos lo siguiente: 1) los procesos de la compresión y dilatación del aire son isotérmicos; 2) los volúmenes del aire son proporcionales a los desplazamientos del émbolo  $x$ ; 3) el rozamiento del émbolo es nulo.

**Solución:** El trabajo elemental que se obtiene del acumulador es

$$dE = pSdx \quad (S, \text{área del émbolo}).$$

<sup>1)</sup> Además, se usan acumuladores esféricos con membrana elástica que separa el líquido del aire (véase la fig. 18).

Según lo admitido.

$$p = p_1 \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad W = W_1 = \frac{x}{x_1}.$$

De donde

$$dE = p_1 x_1 S \frac{dx}{x} = p_1 W_1 \frac{dx}{x}.$$

Integrando la ecuación anterior y sustituyendo por los valores conocidos determinamos el valor de  $E$ .

$$E = p_1 W_1 \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x} = p_1 W_1 \ln \frac{x_1}{x_2} = p_1 W_1 \ln \frac{p_2}{p_1},$$

$$E = 75 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2,3 \cdot 0,3 = 1.550 \text{ kgm}.$$

**Ejemplo 2.** En la fig. 16 se muestra el esquema de una prensa hidráulica que al mismo tiempo puede servir de esquema de un gato hidráulico. Para el caso

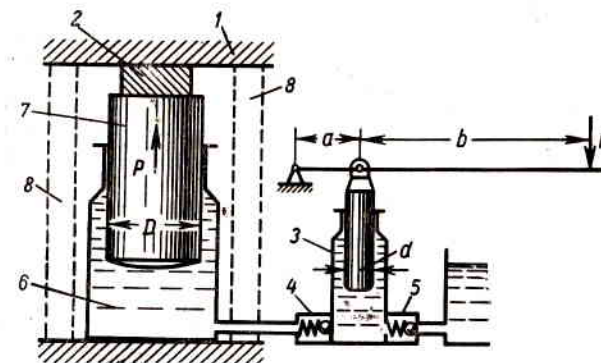


Fig. 16. Esquema de una prensa hidráulica (de un gato)

del gato, el cuerpo 1 es una carga que se eleva, para el de la prensa, es un apoyo fijo unido a los cimientos mediante soportes 8 (se muestran con líneas punteadas); el cuerpo 2 representa en este caso el material a prensar.

Mediante la bomba de mano 3 provista de válvulas aspirantes 5 e impelente 4 se crea presión en el cilindro 6 que actúa sobre el émbolo 7 y provoca una presión sobre el émbolo  $P$ .

Determinese esta presión disponiendo de los datos siguientes (véase la fig. 16):  $R = 20 \text{ kg}$ ,  $a/b = 1/9$ ;  $D/d = 10$ .

**Solución.**

$$P = R \frac{a+b}{a} \left( \frac{D}{d} \right)^2 = 20 \cdot 10 \cdot 100 = 20.000 \text{ kg}.$$

**Ejemplo 3.** El multiplicador hidráulico (fig. 17) sirve para aumentar la presión  $p_1$  obtenida de una bomba o de un acumulador. La presión  $p_1$  es transmi-



tida al cilindro 1 en cuyo interior entra el cilindro hueco 2 de peso  $G$  y diámetro  $D$ . Este cilindro resbala por el émbolo buzo fijo 3 de diámetro  $d$ , del cual, por un canal, el líquido se expulsa bajo la presión elevada  $p_2$ .

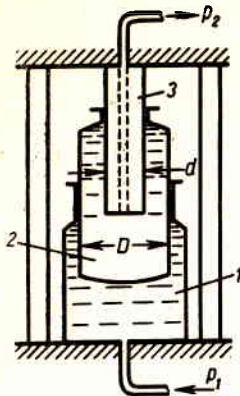


Fig. 17. Esquema de un multiplicador hidráulico

Determinese la presión  $p_2$ , disponiendo de los datos siguientes:  $G = 300$  kg;  $D = 125$  mm;  $p_1 = 100$  kg/cm<sup>2</sup>;  $d = 50$  mm.

Despréciense las fuerzas de rozamiento en las empaquetaduras.

**Solución:** De la condición del equilibrio del cilindro 2 tenemos

$$\frac{\pi D^2}{4} p_1 = \frac{\pi d^2}{4} p_2 + G,$$

de donde

$$p_2 = p_1 \left( \frac{D}{d} \right)^2 - \frac{4G}{\pi d^2} = 100 \left( \frac{125}{50} \right)^2 - \frac{4 \cdot 300}{\pi \cdot 5^2} = 610 \text{ kg/cm}^2.$$

**Ejemplo 4.** En los sistemas hidráulicos de aviones se usa un dispositivo automático de descarga de la bomba que funciona del modo siguiente (fig. 18): si en el sistema el líquido no se consume, la bomba carga el acumulador hidráulico 4 hasta la presión  $p_{\text{máx}}$ , con la cual el émbolo  $d$  abre el paso al líquido hacia

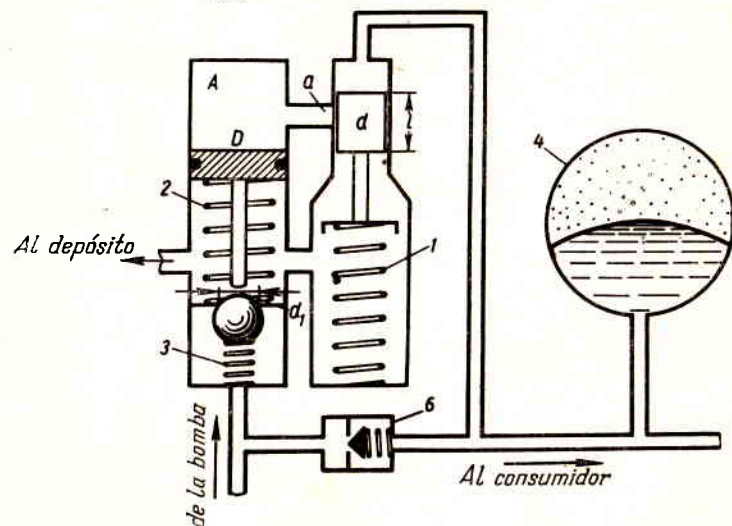


Fig. 18. Esquema del dispositivo automático de descarga de la bomba

la cavidad  $A$  a través del canal  $a$ . Bajo la acción de la presión  $p_{\text{máx}}$ , el émbolo  $D$  se desplaza y abre con su vástago la válvula de bola que une la línea de empuje de la bomba con el desagüe al depósito. La bomba funciona en el régimen de marcha libre hasta que la presión en el sistema hidráulico desciende a  $p_{\text{mín}}$ ,

cuando el émbolo  $d$ , desplazándose hacia arriba, une la cavidad  $A$  con el desagüe al depósito. Entonces, el muelle 2 apartará el émbolo  $D$ , la válvula de bola se cerrará y la bomba comenzará de nuevo la carga.

Calcúlense las características de los muelles 1 y 2 disponiendo de los datos siguientes:  $p_{\text{máx}} = 140$  at;  $p_{\text{mín}} = 80$  at;  $d = 8$  mm;  $l = 16$  mm;  $D = 10$  mm;  $a = 2$  mm;  $d_1 = 6$  mm.

**Solución.** Primero determinamos la fuerza máxima y mínima del muelle 1;

$$P_{\text{máx.}} = p_{\text{máx.}} \frac{\pi d_1^2}{4} = 140 \frac{\pi \cdot 0,8^2}{4} = 70,4 \text{ kg};$$

$$P_{\text{mín.}} = p_{\text{mín.}} \frac{\pi d_1^2}{4} = 80 \frac{\pi \cdot 0,8^2}{4} = 40,2 \text{ kg}.$$

La carrera del muelle es

$$h_1 = l - a = 16 - 2 = 14 \text{ mm}.$$

Ahora calculamos la característica (rigidez) del muelle 1:

$$\frac{P_{\text{máx.}} - P_{\text{mín.}}}{h_1} = \frac{70,4 - 40,2}{14} = 2,16 \text{ kg/mm}.$$

Para abrir la válvula de bola, la fuerza de presión sobre el émbolo ha de vencer la fuerza del muelle 2, la fuerza de rozamiento de la copa de empaquetadura del émbolo, la fuerza de presión sobre la válvula de bola y la fuerza del muelle 3. Tomando la fuerza de rozamiento igual a 0,1 de la presión, y la fuerza del muelle,  $Q = 30$  kg, obtendremos la ecuación para determinar la fuerza máxima  $F_{\text{máx.}}$  del muelle 2:

$$p_{\text{máx.}} \frac{\pi D^2}{4} 0,9 = F_{\text{máx.}} + p_{\text{máx.}} \frac{\pi d_1^2}{4} + Q,$$

de donde

$$F_{\text{máx.}} = 140 \cdot 0,25\pi (1,0^2 \cdot 0,9 - 0,6^2) - 30 = 30 \text{ kg}.$$

Pero, por otra parte, la fuerza del muelle 2 debe desplazar el émbolo  $D$  en la dirección contraria, venciendo la fuerza de fricción de las copas de empaquetadura del émbolo descargado. Tomando la última igual a 10 kg, tendremos

$$F_{\text{mín.}} = 10 \text{ kg}.$$

La rigidez del muelle 2 (siendo la altura de ascenso del émbolo  $h_2 = 10$  mm) es igual a

$$\frac{F_{\text{máx.}} - F_{\text{mín.}}}{h_2} = \frac{30 - 10}{10} = 2 \text{ kg/mm}$$



## Reposo relativo del líquido

### § 10. Nociones fundamentales

En el capítulo anterior hemos examinado el equilibrio del líquido sólo bajo la acción de una fuerza de masa, su propio peso. Este caso tiene lugar cuando el líquido reposa en un recipiente inmóvil respecto a la tierra o que realiza un movimiento uniforme y rectilíneo.

En el caso cuando el recipiente con líquido se encuentra en movimiento variado o curvilíneo, sobre todas las partículas del líquido actúan, además del propio peso, las fuerzas de inercia del movimiento de traslación. Debido a la acción de dichas fuerzas, el líquido realiza cierto desplazamiento en el recipiente, y, si estas fuerzas son constantes en el tiempo, el líquido toma una nueva posición de equilibrio, es decir, se halla inmóvil respecto a las paredes del recipiente. Este caso de equilibrio del líquido se denomina *reposo relativo*.

La superficie libre del líquido y otras superficies de nivel durante el reposo relativo (véase § 6) pueden diferir sustancialmente de la superficie de nivel del líquido en reposo en un recipiente inmóvil, es decir, del plano horizontal. Al determinar la forma y la posición de la superficie libre del líquido en reposo relativo, conviene guiarse por la propiedad principal de toda superficie de nivel, que consiste en lo siguiente: la fuerza resultante de masa actúa siempre en dirección normal a la superficie de nivel.

Efectivamente, si la fuerza de masa resultante no actuase en dirección de la normal, sino bajo cierto ángulo a la superficie de nivel, entonces, la componente tangencial de esta fuerza provocaría la traslación de las partículas del líquido a lo largo de la superficie de nivel. Pero, en el estado de reposo relativo, las partículas del líquido no se desplazan tanto respecto a las paredes del recipiente como unas respecto a otras. Por consiguiente, la única dirección posible de la fuerza de masa resultante es la normal a la superficie libre, así como a otras superficies de nivel.

Además, hay que tener en cuenta que las superficies de nivel no pueden intersectarse; en caso contrario obtendríamos en la línea de intersección de estas dos superficies varios puntos, en los cuales la

presión tendría simultáneamente dos valores diferentes, lo que es imposible.

Examinemos dos casos típicos del reposo relativo del líquido: a) dentro de un recipiente en movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado y b) dentro de un recipiente que gira uniformemente alrededor de un eje vertical.

### § 11. Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado de un recipiente con líquido

Supongamos que un recipiente con líquido, por ejemplo, el depósito de combustible de un avión, se encuentra en movimiento rectilíneo con aceleración constante  $a$ . En este caso, la fuerza resultante de

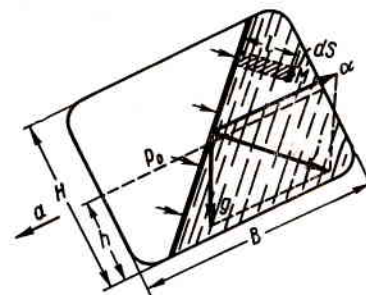


Fig. 19. Reposo relativo del líquido durante el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado del recipiente

masa que actúa sobre el líquido será la suma de los vectores de la fuerza de inercia, dirigida en sentido contrario a la aceleración  $a$ , y de la de gravedad (fig. 19).

Designando la fuerza resultante de masa, en relación a la unidad de masa, por  $j$ , tendremos

$$\vec{j} = \vec{a} + \vec{g}.$$

Para todas las partículas del volumen del líquido que se estudia, las fuerzas resultantes de masa son paralelas unas a otras y las superficies de nivel son perpendiculares a estas fuerzas; por eso, todas las superficies de nivel, incluyendo la libre, son planos paralelos entre sí. El ángulo de inclinación de estos planos respecto al horizonte se determina de la condición de su perpendicularidad a la fuerza  $j$ .

Para resolver completamente la cuestión de la posición de la superficie libre del líquido en un recipiente en movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, es necesario añadir a la condición mencionada la ecuación de volúmenes, es decir, hace falta saber el volumen del líquido en el recipiente y expresarlo en dimensiones del recipiente  $B$  y  $H$  y el nivel inicial del líquido  $h$ .



La ecuación que permite hallar la presión en cualquier punto del volumen del líquido considerado, puede ser obtenida de modo análogo al procedimiento indicado en el § 6.

Tomemos, por ejemplo, en el punto  $M$  una superficie  $dS$  paralela a la superficie libre y construyamos sobre esta superficie un volumen cilíndrico con una generatriz que sea normal a la superficie libre. La condición de equilibrio del volumen del líquido indicado en dirección de la normal a la superficie libre será:

$$p dS = p_0 dS + j \rho l dS,$$

donde el último término es la fuerza de masa que actúa sobre el volumen considerado del líquido y  $l$  es la distancia desde el punto  $M$  hasta la superficie libre.

Dividiendo cada término entre  $ds$ , obtendremos

$$p = p_0 + j \rho l. \quad (3.1)$$

En el caso particular cuando  $a = 0$ ,  $j = g$  y la fórmula (3.1) se transforma en la ecuación fundamental de la hidrostática (2.2).

En la práctica de aviación, al analizar los casos de acción de la fuerza de inercia, se usa generalmente la noción de *sobrecarga* que (durante el vuelo rectilíneo) es igual a

$$n_x = \frac{a}{g}.$$

Durante las evoluciones del avión en el aire, la sobrecarga puede ser tangencial ( $n_x$ ) y normal ( $n_y$ ). Esta última surge en el vuelo curvilíneo (entrada en picado y salida de éste, viraje) y se determina de modo diferente, a saber: con una velocidad de vuelo  $V$  y radio de curvatura  $R$ , ésta es igual a

$$n_y = \frac{a+g}{g} = \frac{V^2}{Rg} + 1.$$

Más arriba ha sido examinado el caso de la sobrecarga tangencial; sin embargo, en vista de las pequeñas dimensiones de los depósitos del avión en comparación con el radio  $R$ , todo lo expuesto puede ser aplicado también para el caso de sobrecarga normal, y la aceleración  $a$  debe ser calculada por la fórmula

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

Durante el vuelo del avión las sobrecargas normales suelen ser mucho más grandes que las tangenciales (en 8—10 veces).

Si las sobrecargas son grandes y la cantidad de combustible en los depósitos es pequeña, es posible que se desplace considerablemente el líquido y quede sin llenar la boca de aspiración del conductor de combustible con el siguiente cese del suministro de éste. Para evitar esto se instalan dispositivos especiales junto a la boca de aspiración, los cuales excluyen la posibilidad de que la boca quede sin combustible.

## § 12. Rotación uniforme de un recipiente con líquido

Tomemos primeramente un recipiente cilíndrico abierto con líquido y comuniquémosle una velocidad de rotación angular constante  $\omega$  alrededor de su eje vertical. El líquido adquiere paulatinamente la misma velocidad angular que el recipiente, y su superficie libre se

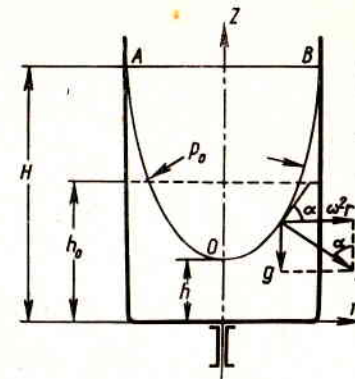


Fig. 20. Rotación de un recipiente abierto alrededor de un eje vertical

deforma: en la parte central el nivel del líquido baja, junto a las paredes, se eleva, y toda la superficie libre del líquido se convierte en una superficie de rotación (fig. 20).

En este caso, sobre el líquido actúan dos fuerzas de masa: la de gravedad y la centrífuga, las cuales si se relacionan a la unidad de masa serán iguales a  $g$  y  $\omega^2 r$  respectivamente.

La fuerza resultante de masa  $j$  crece al aumentar el radio a cuenta de la segunda componente, y el ángulo de su inclinación con respecto al horizonte disminuye. Esta fuerza es normal a la superficie libre del líquido, por lo cual, la inclinación de esta superficie crece al aumentar el radio.

Hallems la ecuación de la curva  $AOB$  en el sistema de coordenadas  $(z, r)$  que principia en el centro del fondo del recipiente. Teniendo en cuenta que la fuerza  $j$  es normal a la curva  $AOB$ , del diseño tendremos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

De donde

$$dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr,$$

o después de integrar

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C.$$



De esta condición se deduce, que  $C = h$  en el punto de intersección de la curva  $AOB$  con el eje de rotación; por eso, como fórmula final tendremos

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \quad (3.2)$$

es decir, la curva  $AOB$  es una parábola, y la superficie libre es la del paraboloides de rotación.

Aplicando la ecuación (3.2), se puede determinar la posición de la superficie libre en el recipiente, por ejemplo, la altura máxima del líquido  $H$  y la altura de la posición del vértice del paraboloides  $h$ ,

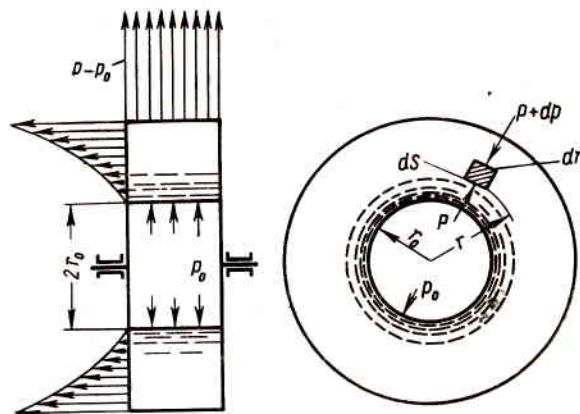


Fig. 21. Rotación de un recipiente con líquido alrededor de un eje horizontal

siendo dada la velocidad de rotación  $\omega$ . Pero para eso hace falta utilizar también la ecuación de volúmenes: el volumen del líquido en reposo es igual a su volumen durante la rotación.

En la práctica tiene lugar más a menudo el caso de rotación del recipiente con líquido, cuando el eje de rotación está dispuesto horizontalmente (o a voluntad), y la velocidad angular  $\omega$  es tan grande que, en comparación con las fuerzas centrífugas, la fuerza de gravedad prácticamente carece de valor.

Es fácil obtener, para este caso, la ley del cambio de presión en el líquido, analizando la ecuación de equilibrio del volumen elemental con superficie de base  $dS$  y altura  $dr$  tomada a lo largo del radio (fig. 21). Sobre el elemento escogido del líquido actúan las fuerzas de presión y la centrífuga. Designando con  $p$  la presión en el centro de la superficie  $dS$ , dispuesta sobre el radio  $r$ , y con  $p + dp$ , en el centro de la otra base del volumen (en el radio  $r + dr$ ), tendremos la siguiente ecuación de equilibrio del volumen escogido en la dirección del radio:

$$pdS - (p + dp)dS + \rho \omega^2 r dr dS = 0,$$

$$dp = \rho \omega^2 r dr.$$

Integrando

$$p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + C.$$

La constante  $C$  se halla de la condición de que  $r = r_0$ ,  $p = p_0$ , y, por consiguiente,

$$C = p_0 + \rho \omega^2 \frac{r_0^2}{2}.$$

Sustituyendo  $C$  por su valor obtendremos definitivamente la relación entre  $p$  y  $r$  en la forma siguiente:

$$p = p_0 + \rho \omega^2 \frac{r^2 - r_0^2}{2} \quad (3.3)$$

Es evidente, que en este caso las superficies de nivel serán las superficies cilíndricas circulares con un eje común, el de rotación del líquido. Si el recipiente está lleno de líquido parcialmente, su superficie libre como una de las superficies de nivel, será también cilíndrica y su radio será  $r_0$ , y la presión sobre ésta,  $p_0$ .

Con frecuencia hace falta calcular la fuerza de presión del líquido que gira junto con el recipiente sobre su pared (o a la parte anular de esta).

Para eso es necesario expresar primeramente la fuerza de presión sobre la superficie elemental anular con radio  $r$  y anchura  $dr$ . Aprovechando la fórmula (3.3) tendremos

$$dP = p dS = \left[ p_0 + \rho \omega^2 \frac{r^2 - r_0^2}{2} \right] 2\pi r dr,$$

y después hay que integrar entre los límites necesarios.

Haciendo girar el líquido a gran número de revoluciones, se puede obtener una fuerza de presión total bastante considerable sobre la pared. Esto se aplica en diferentes embragues de fricción en los motores de aviación, donde se necesita crear grandes fuerzas de presión normal para engranar dos árboles. El procedimiento descrito más arriba se emplea para calcular la fuerza de la presión axial del líquido sobre las ruedas activas de las bombas centrífugas.

Fórmulas semejantes para los casos de reposo relativo se pueden sacar integrando las ecuaciones diferenciales de equilibrio del líquido (véase el apéndice).

**Ejemplo.** Determinése la fuerza de la presión axial del líquido sobre la rueda activa de la bomba centrífuga del motor cohete de combustible líquido «Walter», partiendo de que, entre los discos de la rueda y el cuerpo de la bomba (en los espacios  $W_1$  y  $W_2$ ), el líquido gira con una velocidad angular igual a la mitad de

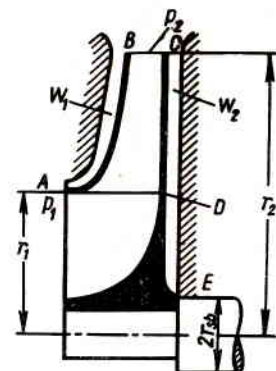


Fig. 22. Para la determinación de la fuerza axial en la bomba



la de rotación de la rueda y que la fuga del líquido a través de la holgura  $A$  es tan pequeña que se puede despreciar (fig. 22).

La presión manométrica en la salida de la rueda es  $p_2 = 38$  at, en la entrada —  $p_1 = 0$ . El número de revoluciones de la rueda  $n = 16.500$  r.p.m. Las dimensiones de la rueda:  $r_2 \approx 50$  mm;  $r_1 = 25$  mm;  $r_b = 12$  mm. El peso específico del líquido  $\gamma = 918$  kg/m<sup>3</sup>.

**Solución.** Las fuerzas de presión del líquido sobre las superficies  $AB$  y  $CD$  se equilibran mutuamente. Queda sin equilibrar solamente la fuerza de presión axial sobre la superficie  $DE$ , o sea, sobre la superficie anular limitada por las circunferencias de radios,  $r_1$  y  $r_b$ . Por consiguiente, la fuerza buscada está dirigida de la derecha a la izquierda y es igual a

$$P = 2\pi \int_{r_b}^{r_1} p r dr,$$

donde, basándose en (3.3), con la sustitución de  $p_0$  y  $r_0$  por  $p_2$  y  $r_2$ , tendremos

$$p = p_2 - \gamma \frac{\omega_{lq}^2}{2g} (r_2^2 - r^2)$$

$\omega_{lq}$  es la velocidad angular de rotación del líquido).

De donde

$$P = 2\pi \int_b^{r_1} \left[ p_2 - \gamma \frac{\omega_{lq}^2}{2g} (r_2^2 - r^2) \right] r dr = \pi (r_1^2 - r_b^2) \times \\ \times \left[ p_2 - \gamma \frac{\omega_{lq}^2}{2g} \left( r_2^2 - \frac{r_1^2 - r_b^2}{2} \right) \right].$$

Después de sustituir por los valores numéricos, tendremos

$$P = \pi (2,5^2 - 1,2^2) \left[ 38 - 0,000,918 \left( \frac{\pi \cdot 16.500}{2 \cdot 30} \right)^2 \frac{1}{2 \cdot 981} \times \right. \\ \left. \times \left( 5^2 - \frac{2,5^2 + 1,2^2}{2} \right) \right] = 460 \text{ kg}.$$

## 4

### Ecuaciones fundamentales de hidráulica

#### § 13. Nociones básicas

Pasando al estudio del movimiento de los líquidos, es necesario señalar que al principio vamos a examinar el movimiento del líquido *perfecto*, es decir, de un líquido imaginario que no posee ninguna viscosidad, y sólo después pasaremos al análisis de las corrientes reales. En los líquidos no viscosos, lo mismo que en los reales en estado de reposo, sólo es posible un tipo de tensión: la tensión normal de compresión, es decir, la presión hidromecánica, o simplemente presión.

La presión en un líquido perfecto en movimiento presenta las mismas características que en un líquido en reposo, es decir, en la superficie exterior del líquido está dirigida por la normal interior y en cualquier punto interior del líquido la tensión es igual en todas las direcciones <sup>1)</sup>.

La corriente del líquido puede ser estable e inestable.

La corriente *estable* es invariable en el tiempo, y la presión hidromecánica y la velocidad sólo son funciones de las coordenadas, pero no dependen del tiempo. La presión y la velocidad varían al desplazarse las partículas del líquido de una posición a otra, pero, en un punto inmóvil dado del espacio, las magnitudes de presión y de velocidad en el movimiento estable no cambian en el tiempo.

Matemáticamente esto se puede anotar así:

$$p = f_1(x, y, z); \quad v = f_2(x, y, z), \\ \frac{dp}{dt} = 0; \quad \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad \frac{dv_y}{dt} = 0; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0,$$

donde los índices de la velocidad significan sus proyecciones sobre los ejes correspondientes.

<sup>1)</sup> Esta concepción se demuestra de un modo semejante a como se ha hecho para el líquido en reposo (véase el § 5): se componen ecuaciones de movimiento del tetraedro elemental tomando en cuenta las fuerzas de D'Alembert, las cuales, conjuntamente con las de masa, tienden hacia cero, al reducirse el tetraedro a un punto.



En el caso de la corriente *inestable* la presión y la velocidad dependen tanto de las coordenadas, como del tiempo, o sea

$$p = F_1(x, y, z, t); \quad v = F_2(x, y, z, t).$$

Pueden servir de ejemplo de corriente inestable del líquido el vaciado gradual del recipiente a través de un orificio en el fondo, o el movimiento del líquido en un tubo aspirante o impelente de una bomba corriente cuyo émbolo efectúa el movimiento de vaivén.

Ejemplo de corriente estable: derrame del líquido de un recipiente en el cual se mantiene un nivel constante o el movimiento del

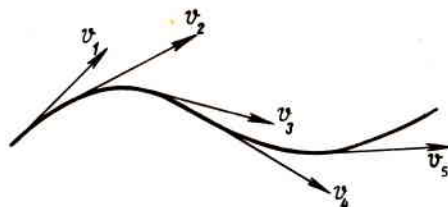


Fig. 23. Línea de corriente

líquido en una tubería cerrada, que se produce por una bomba centrífuga con un número constante de revoluciones.

El examen de las corrientes estables es mucho más sencillo que el de las inestables. A continuación estudiaremos principalmente las corrientes estables y solamente algunos casos particulares de la corriente inestable.

Las trayectorias de las partículas del líquido en corrientes estables son curvas invariables en el tiempo.

En corrientes inestables las trayectorias de diversas partículas que pasan a través de un punto dado del espacio tendrán diferentes formas. Por eso, con el fin de analizar la corriente que se forma en cada momento dado del tiempo, se adopta la noción de la línea de corriente.

La *línea de corriente* es aquella línea dentro del líquido en movimiento cuyos tangentes a cualquier punto de ésta coinciden con el sentido de los vectores de velocidad de las partículas situadas sobre esta línea en un momento dado del tiempo (fig. 23).

Es evidente, que en la corriente estable la línea de corriente coincide con la trayectoria y su forma no varía con el tiempo.

Si en un líquido en movimiento tomamos un contorno cerrado elemental y trazamos a través de todos sus puntos líneas de corriente, se formará una superficie tubular que se denomina *vena líquida*. La parte de la corriente comprendida en el interior de la vena líquida se denomina *filete* (fig. 24).

Si la sección del filete tiende hacia cero, el filete se transforma en línea de corriente.

Los vectores de la velocidad son tangentes en cualquier punto de la superficie lateral de la vena líquida, siendo nulas las componentes de velocidad normales a esta superficie; por consiguiente, ninguna partícula de líquido en cualquier punto de la vena líquida puede penetrar en el interior o salir fuera del filete. Por lo cual, la vena líquida semeja una pared infranqueable y el filete representa una corriente independiente elemental.

Para empezar consideraremos los flujos de dimensiones finitas como un conjunto de filetes elementales, es decir, supondremos que la

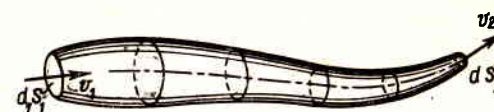


Fig. 24. Filete

corriente tiene forma de chorro. Por tener velocidades diferentes, los filetes colindantes se deslizarán uno sobre otro pero no se mezclarán.

Generalmente se llama *sección viva* o simplemente sección del flujo a la superficie en los límites del flujo trazada según la normal a las líneas de corriente. En los flujos examinaremos, generalmente, los sectores cuyos filetes pueden ser considerados paralelos y, por consiguiente, planas las secciones vivas.

#### § 14. Gasto. Ecuación del gasto

*Gasto* es la cantidad de líquido que pasa a través de la sección viva del flujo (del filete) en la unidad de tiempo. Dicha cantidad se puede medir en unidades de volumen, de peso o de masa, por lo cual existen: el *gasto volumétrico*  $Q$ , el *gasto en peso*  $G$  y el *gasto en masa*  $M$ .

Para un filete elemental de sección infinitesimal, la velocidad real  $v$  se puede considerar igual en todos los puntos de cada sección. Por consiguiente, el gasto volumétrico para un filete elemental será igual a

$$dQ = v dS \left[ \frac{m^3}{seg} \right], \quad (4.1)$$

donde  $dS$  es la superficie de la sección del filete, el gasto en peso es

$$dG = \gamma dQ \left[ \frac{kg}{seg} \right] \quad (4.2)$$

y el gasto en masa es

$$dM = \rho dQ = \rho v dS \left[ \frac{kg \cdot seg}{m} \right]. \quad (4.3)$$

En general, para un flujo de dimensiones finitas, la velocidad tiene diferente valor en distintos puntos de la sección; por eso el gasto se



debe calcular como suma de gastos elementales de los filetes, o sea,

$$Q = \int_S v dS. \quad (4.4)$$

Habitualmente, para expresar el flujo volumétrico se recurre a la velocidad media en la sección:

$$v_{med.} = \frac{Q}{S}, \quad (4.5')$$

de donde

$$Q = v_{med.} S. \quad (4.5)$$

Basándose en la ley de la conservación de la materia y en la propiedad de la «infranqueabilidad» de la vena líquida, indicada más arriba, se puede afirmar que, para una corriente estable de líquido incompresible, el gasto es el mismo en todas las secciones del filete elemental (fig. 24), o sea

$$dQ = v_1 dS_1 = v_2 dS_2 = \text{const. (a lo largo del filete)}. \quad (4.6)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación del gasto* para un filete elemental.

Se puede obtener una ecuación análoga para el flujo de dimensiones finitas, limitado por paredes infranqueables, sustituyendo las velocidades reales por las velocidades medias, es decir,

$$Q = v_{med.1} S_1 = v_{med.2} S_2 = \text{const. (a lo largo del flujo)}. \quad (4.7)$$

De esta ecuación se deduce, que las velocidades medias en un flujo de líquido incompresible son inversamente proporcionales a las superficies de las secciones, o sea

$$\frac{v_{med.1}}{v_{med.2}} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (4.7')$$

Es evidente, que la ecuación del gasto es un caso particular de la ley general de conservación de la materia y también es la condición de la continuidad de la corriente.

### § 15. Obtención de la ecuación de Bernoulli para un filete de líquido perfecto

Examinemos la corriente estable del líquido perfecto sólo bajo la acción de la fuerza de masa, de la gravitación, y determinemos para este caso la ecuación fundamental que relacione la presión en el líquido y la velocidad de su movimiento.

Tomemos uno de los filetes componentes del flujo y limitemos con las secciones 1 y 2 un segmento de este filete de cualquier longitud (fig. 25). Supongamos que la superficie de la primera sección sea igual a  $dS_1$ ; la velocidad,  $v_1$ ; la presión,  $p_1$ , y la altura del centro de grave-

dad de la sección, a partir de un plano horizontal cualquiera,  $z_1$ . En la segunda sección supongamos respectivamente los valores  $dS_2$ ,  $v_2$ ,  $p_2$ , y  $z_2$ .

Durante un tiempo infinitesimal  $dt$ , el segmento del filete escogido se desplazará bajo la acción de fuerzas exteriores en la posición 1'—2'.

Apliquemos para este segmento el siguiente teorema de la Mecánica: el trabajo de las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual al incremento de la energía cinética de dicho cuerpo. En el caso dado, estas fuerzas

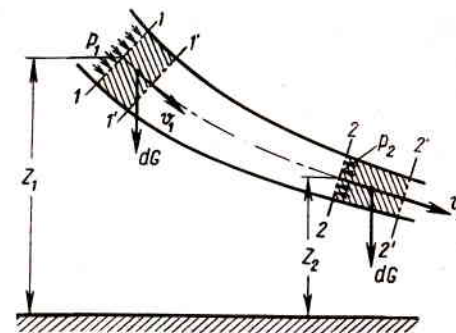


Fig. 25. Para la deducción de la ecuación de Bernoulli para un filete

son las de presión, que obran normalmente a la superficie del segmento y únicamente una de las fuerzas de masa es de gravitación.

Calculemos el trabajo de las fuerzas de presión y gravitación, y la modificación de la energía cinética del segmento en el tiempo  $dt$ .

El trabajo de la fuerza de presión en la primera sección será positivo, porque la dirección de la fuerza coincide con la del desplazamiento y se expresará como producto de la fuerza ( $p_1 dS_1$ ) por la distancia recorrida ( $v_1 dt$ ), o sea

$$p_1 dS_1 v_1 dt.$$

El trabajo de la fuerza de presión en la segunda sección tendrá el signo «menos», porque la dirección de la fuerza es inversa a la del desplazamiento y se representará por

$$- p_2 dS_2 v_2 dt.$$

Las fuerzas de presión que actúan en la superficie lateral del segmento del filete no efectuarán ningún trabajo, porque son normales a ésta y, por consiguiente, son también normales a los desplazamientos.

De este modo, el trabajo de las fuerzas de presión será igual a

$$p_1 v_1 dS_1 dt - p_2 v_2 dS_2 dt. \quad (4.8)$$

El trabajo de la fuerza de gravitación es igual al cambio de la energía potencial de la posición del segmento. Por eso debemos sustraer de la energía de posición del líquido en el volumen 1—2 la del líqui-



do, en el volumen 1'—2'. Como resultado, la energía se reducirá en una cantidad equivalente al volumen intermedio 1'—2 y quedará solamente la diferencia de energías de posición de los segmentos del filete 1—1' y 2—2'. Si tomamos en consideración la ecuación del gasto (4.6), es fácil observar que los volúmenes y, por consiguiente, los pesos de los segmentos 1—1' y 2—2' son iguales, o sea

$$dG = \gamma v_1 dS_1 dt = \gamma v_2 dS_2 dt. \quad (4.9)$$

Por eso, el trabajo de la fuerza de gravitación será igual al producto de la diferencia de alturas por el peso  $dG$ :

$$(z_1 - z_2) dG. \quad (4.10)$$

Para calcular el incremento de la energía cinética del segmento durante el tiempo  $dt$ , hace falta restar de la energía cinética del volumen 1'—2' la del volumen 1—2. La energía cinética se reducirá en una cantidad equivalente al volumen intermedio 1'—2 y quedará solamente la diferencia de energías cinéticas de los segmentos 2—2' y 1—1', el peso de cada uno de los cuales es igual a  $dG$ .

De tal modo, el incremento de la energía cinética será igual a

$$(v_2^2 - v_1^2) \frac{dG}{2g}. \quad (4.11)$$

Sumando el trabajo de las fuerzas de presión (4.8) con el de la fuerza de gravitación (4.10) e igualando esta suma al incremento de la energía cinética (4.11) tendremos

$$p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt + (z_1 - z_2) dG = (v_2^2 - v_1^2) \frac{dG}{2g}.$$

Dividiendo toda la ecuación por el peso  $dG$  (4.9) y después de simplificar queda

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Agrupemos los términos que se refieren a la primera sección en la parte izquierda de la ecuación y los referentes a la segunda sección, en la parte derecha de la misma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (4.12)$$

La ecuación obtenida se llama *ecuación de Bernoulli para un filete de líquido perfecto*. Fue obtenida por Bernoulli en 1738.

Los términos de la ecuación en la fórmula (4.12) tienen dimensiones lineales y se denominan:  
 $z$ , altura de posición o energía de posición (geométrica);

$\frac{p}{\gamma}$ , altura de presión o energía de presión (piezométrica);  
 $\frac{v^2}{2g}$ , altura dinámica o energía cinética (dinámica).

La expresión

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H$$

se llama *energía total* (o *altura de presión total*).

La ecuación de Bernoulli (4.12) está enunciada para dos secciones cualesquiera del filete y expresa la igualdad de las energías totales  $H$  en estas secciones. Puesto que estas secciones son tomadas a voluntad, para cualquier otra sección del mismo filete la energía total tendrá el mismo valor, o sea

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const. (a lo largo del filete)}.$$

De este modo, para el líquido perfecto en movimiento la suma de tres alturas: la de nivel,

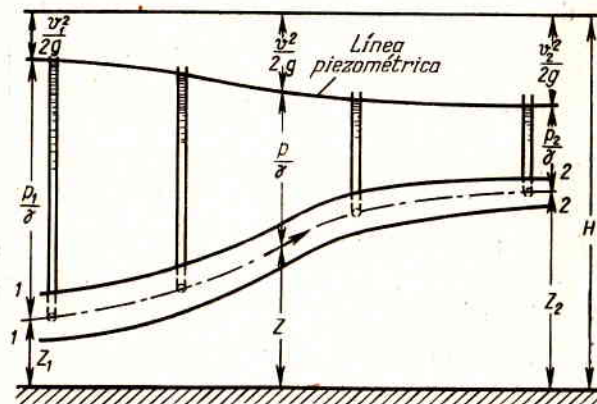


Fig. 26. Gráfica de variación de las alturas de posición, de presión y dinámica a lo largo de un filete del líquido perfecto

la de presión y dinámica es una magnitud constante a lo largo del filete.

Esta deducción se ilustra por medio de la gráfica de la fig. 26, donde se muestra la variación de las tres alturas a lo largo del filete. La línea de variación de alturas de presión se denomina línea piezométrica y se puede considerar como el punto geométrico de los niveles de los piezómetros instalados a lo largo del filete.

De la ecuación de Bernoulli y de la del gasto se deduce que, si el área de la sección transversal del filete disminuye, es decir, si el filete se contrae, la velocidad de corriente del líquido aumenta



y la presión disminuye y, al contrario, si el filete se ensancha, la velocidad disminuye y la presión aumenta.

Analicemos el sentido físico o más bien energético de la ecuación de Bernoulli. Denominaremos a la energía que corresponde a la unidad de peso *energía específica* del líquido, o sea

$$e = \frac{E}{G}.$$

La energía específica tiene dimensión lineal, lo mismo que los términos de la ecuación de Bernoulli. No es difícil demostrar que los términos de la ecuación de Bernoulli son diversas formas de la energía específica del líquido, a saber:

$z$  es la energía específica de posición, ya que la partícula de líquido de peso  $\Delta G$ , estando a la altura  $z$ , dispone de una energía de posición igual a  $\Delta Gz$ , correspondiendo a la unidad de peso  $\frac{\Delta Gz}{G} = z$ ;

$\frac{p}{\gamma}$  es la energía específica de presión del líquido en movimiento, ya que la partícula de líquido de peso  $\Delta G$  bajo la presión  $p$  dispone de la capacidad de elevarse a la altura  $\frac{p}{\gamma}$  y, de este modo, adquirir la energía de posición  $\Delta G \frac{p}{\gamma}$ ; después de dividir por  $\Delta G$  resulta  $\frac{p}{\gamma}$ ;

$z + \frac{p}{\gamma}$  es la energía específica potencial del líquido;

$\frac{V^2}{2g}$  es la energía específica cinética del líquido, puesto que para la misma partícula  $\Delta G$ , la energía cinética referida a la unidad de peso es igual a  $\Delta G \frac{V^2}{2g}$ ;  $\Delta G = \frac{V^2}{2g}$ ;

$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$ , es la energía específica total del líquido en movimiento.

De tal modo, el sentido energético de la ecuación de Bernoulli para un filete elemental de líquido perfecto consiste en que la energía específica total del líquido se mantiene constante a lo largo del filete. La ecuación de Bernoulli expresa, por consiguiente, la ley de conservación de la energía mecánica para un líquido perfecto en movimiento.

La energía mecánica del líquido en movimiento puede presentarse en tres formas: la de posición, la de presión y la cinética. La primera y tercera formas de la energía mecánica son conocidas de la Mecánica y son propias, tanto de los cuerpos sólidos, como de los líquidos. En cuanto a la energía de presión, cabe señalar, que esta forma de energía es característica para líquidos en movimiento.

Durante el movimiento de un líquido perfecto, una forma de energía puede transformarse en otra, pero la energía específica total, como se deduce de la ecuación de Bernoulli, queda siempre invariable.

Es fácil transformar la energía de presión en trabajo mecánico. El dispositivo más sencillo para realizar esta transformación, empleado

en gran escala en los aviones, es un cilindro con émbolo y vástago (fig. 27). Vamos a demostrar que durante esta transformación cada unidad de peso del líquido realiza un trabajo numéricamente igual a la altura de presión.

Supongamos que la superficie del émbolo sea  $S$ , la carrera del mismo  $L$ , la presión manométrica del líquido que entra en la cavidad izquierda del cilindro —  $p$ , y la presión manométrica en la otra parte

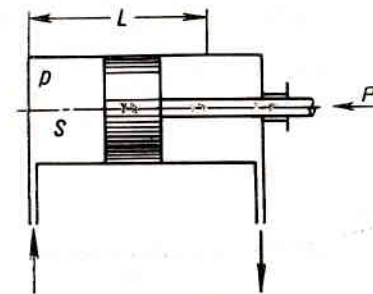


Fig. 27. Cilindro con émbolo y vástago

del émbolo es igual a cero. Entonces, la fuerza total de presión del líquido, igual a la fuerza  $P$ , que se vence al desplazar el émbolo de la posición extrema de la izquierda a la extrema de la derecha será

$$P = pS,$$

y el trabajo de esta fuerza

$$E = pSL.$$

La cantidad ponderal del líquido que hace falta introducir en el cilindro para realizar este trabajo es igual al peso del líquido contenido en el volumen del cilindro, o sea

$$G = SL\gamma.$$

Por consiguiente, el trabajo sobre cada kilogramo será

$$e = \frac{E}{G} = \frac{pSL}{SL\gamma} = \frac{p}{\gamma}.$$

A menudo la ecuación de Bernoulli se expresa de otra manera. Multiplicando todos los términos de la ecuación (4.12) por  $\gamma$ , tendremos

$$z_1\gamma + p_1 + \gamma \frac{v_1^2}{2g} = z_2\gamma + p_2 + \gamma \frac{v_2^2}{2g}. \quad (4.13)$$

Ahora los términos de la ecuación de Bernoulli están expresados en unidades de presión ( $\text{kg/m}^2$ ) y se denominan del modo siguiente:  $z\gamma$  es la presión de peso;



$p$  es la presión hidromecánica (o simplemente presión);

$$\gamma \frac{v^2}{2g} = \rho \frac{v^2}{2}, \text{ es la presión dinámica } ^1).$$

La ecuación de Bernoulli para un filete de líquido perfecto se puede también obtener fácilmente integrando las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto (véase el apéndice).

### § 16. Ecuación de Bernoulli para la corriente real

Al pasar del filete elemental de líquido perfecto a la corriente real, es decir, a la del líquido viscoso que tiene dimensiones finitas y está limitado por paredes, hay que tener en cuenta, en primer lugar, la irregularidad en la distribución de las velocidades por la sección y.

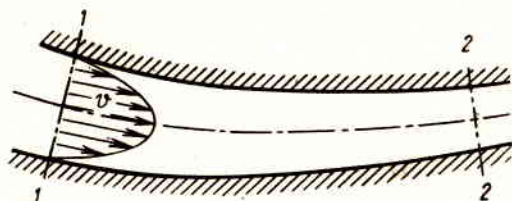


Fig. 28. Distribución de velocidades en el flujo

en segundo lugar, las pérdidas de energía (de la presión). Tanto lo primero, como lo segundo es consecuencia de la viscosidad del líquido.

Cuando el líquido viscoso fluye a lo largo de una pared sólida, por ejemplo, en un tubo, se produce el frenado del flujo, debido a la viscosidad y también a la acción de las fuerzas de cohesión molecular entre el líquido y la pared. Por eso, la velocidad máxima tiene lugar en la parte central del flujo, y en las partes periféricas la velocidad va disminuyendo hasta llegar prácticamente a cero. Se forma una distribución de velocidades análoga a la indicada en la fig. 28.

La distribución irregular de velocidad significa el deslizamiento (desplazamiento) de unas capas o partes del líquido sobre otras, por lo cual surgen tensiones tangenciales, es decir, tensiones de rozamiento. Además, el movimiento del líquido viscoso a menudo va acompañado de la rotación de las partículas, formación de torbellinos y de mezclado. Todo eso exige gastos de energía, por lo cual la energía específica del líquido viscoso en movimiento (energía total) no es constante.

<sup>1)</sup> Hay que tener en cuenta, que la presión que existe en realidad en la corriente, es decir, la tensión de la fuerza normal superficial, es solamente la presión  $p$ . Sin embargo, las otras dos magnitudes  $\left( z\gamma \text{ y } \rho \frac{v^2}{2} \right)$  pueden ser fácilmente transformadas en las presiones correspondientes  $p$ , y, por eso, también se denominan convencionalmente presiones.

como en el caso del líquido perfecto, sino que se gasta gradualmente para vencer las resistencias y, por consiguiente, disminuye a lo largo del flujo.

Debido a la distribución irregular de la velocidad, durante el análisis es necesario utilizar la velocidad media de la sección,  $v_{med.}$  (véase § 14), así como el valor medio de la energía específica del líquido en la sección dada.

Antes de emprender el análisis de la ecuación de Bernoulli para el flujo real, admitiremos lo siguiente: consideraremos que en los límites de las secciones transversales del flujo que se analiza es justa la ley fundamental de la Hidrostática, es decir, la presión hidrostática tiene un valor constante para la sección dada (2.3),

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const. (en los límites de la sección).}$$

Además, suponemos que durante el movimiento del líquido, los diferentes filetes actúan en dirección transversal uno sobre otro con la misma presión que en el estado de reposo. Esto corresponderá a la realidad y puede demostrarse teóricamente cuando la corriente en las secciones transversales dadas sea de filetes paralelos. Precisamente por eso examinaremos tales secciones transversales.

Introduzcamos la noción de la potencia del flujo. Denominaremos *potencia del flujo*, en la sección dada, a la energía total que lleva el flujo a través de la sección dada durante la unidad de tiempo. Puesto que en diversos puntos de la sección transversal del flujo las partículas del líquido disponen de diferente energía, expresemos primero la potencia elemental, es decir, la del filete elemental, como producto de la energía específica total del líquido en el punto dado por el gasto elemental en peso. Tendremos

$$dN = H\gamma dQ = \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \gamma v dS.$$

La potencia de todo el flujo se hallará integrando la expresión anterior en toda la superficie  $S$ , o sea,

$$N = \gamma \int_S \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v dS,$$

y tomando en consideración las admisiones hechas,

$$N = \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_S v dS + \frac{\gamma}{2g} \int_S v^3 dS.$$

El valor medio de la energía específica total del líquido por sección se halla dividiendo la potencia total del flujo por el gasto en peso. Introduciendo la expresión (4.4), tendremos

$$H_{med.} = \frac{N}{Q\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2gQ} \int_S v^3 dS.$$



Multiplicando y dividiendo el último término por  $v_{med.}^2$ , tendremos

$$H_{med.} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\int v^3 dS}{v_{med.}^3 S} \cdot \frac{v_{med.}^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v_{med.}^2}{2g}, \quad (4.14)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente adimensional que refleja la irregularidad de la distribución de la velocidad y es igual a

$$\alpha = \frac{\int v^3 dS}{v_{med.}^3 S}. \quad (4.15)$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador de la expresión (4.15) por  $\frac{\rho}{2}$ , es fácil convencerse de que el coeficiente  $\alpha$  es la relación entre la energía cinética real del flujo en la sección dada y la del mismo flujo y en la misma sección con distribución uniforme de velocidad.

En los casos corrientes de la distribución de la velocidad (fig. 28) el coeficiente  $\alpha$  es siempre mayor que la unidad <sup>1)</sup>, y cuando la distribución de velocidades es uniforme, es igual a la unidad.

Tomemos dos secciones del flujo real y designemos los valores medios de la energía específica (de la energía total) del líquido en estas secciones con  $H_{med.1}$  y  $H_{med.2}$  respectivamente; entonces

$$H_{med.1} = H_{med.2} + \Sigma h, \quad (4.16)$$

donde  $\Sigma h$  es la pérdida total de la energía específica (de la altura de presión) en el sector entre las secciones que se analizan.

Empleando la fórmula (4.14), la ecuación anterior se puede anotar así:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_{med.1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_{med.2}^2}{2g} + \Sigma h. \quad (4.16')$$

Esta es la *ecuación de Bernoulli para el flujo real*. La ecuación obtenida se distingue de la análoga para el filete elemental del líquido perfecto por el término que representa la pérdida de la energía específica (de la altura de presión) y por el coeficiente que tiene en cuenta la irregularidad de la distribución de velocidades. Además, las velocidades que forman parte de esta ecuación son velocidades medias en la sección.

Esta ecuación puede representarse gráficamente, en forma semejante a la del líquido perfecto, pero tomando en consideración la pérdida de la presión, que es, a su vez, cierta altura que va aumentando progresivamente a lo largo del flujo (fig. 29).

Si para el filete de líquido perfecto la ecuación de Bernoulli viene a ser la ley de conservación de la energía mecánica, para el flujo real

<sup>1)</sup> Esto se puede demostrar, si en la fórmula (4.15) expresamos la velocidad  $v$  en forma de suma  $v = v_{med.} + \Delta v$  y la integral la dividimos en cuatro y analizamos el valor numérico de cada una de ellas.

es la ecuación del balance de energía, teniendo en cuenta las pérdidas. La energía que pierde el líquido en el sector dado de la corriente, como es natural, no desaparece, sino que se transforma en energía térmica que produce cierto aumento de la temperatura del líquido.

La disminución del valor medio de la energía específica total del líquido a lo largo del flujo, en comparación con la unidad de su longitud, se denomina *inclinación hidráulica*. La variación de la energía potencial del líquido, comparada con la unidad de longitud, se llama

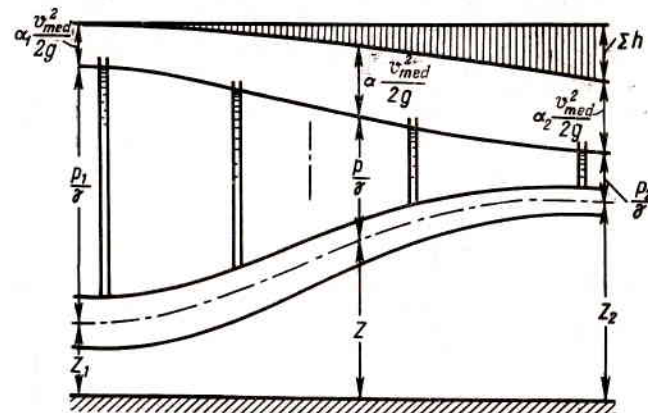


Fig. 29. Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli para un flujo real

*inclinación piezométrica*. Es indudable que en un tubo de diámetro constante con distribución invariable de velocidades las inclinaciones mencionadas son equivalentes.

## § 17. Pérdidas hidráulicas (generalidades)

Las pérdidas de la energía específica (de la altura de presión) o pérdidas hidráulicas, como a menudo se las denomina, dependen de la forma, dimensiones y rugosidad del cauce, de la velocidad de la corriente y de la viscosidad del líquido, pero no dependen del valor absoluto de la presión en el líquido. Aunque la causa primordial de todas las pérdidas hidráulicas es la viscosidad del líquido, por sí misma no siempre ejerce influencia sustancial sobre el valor de éstas. Con más detalles lo analizaremos a continuación.

Experimentalmente se ha demostrado que en muchos casos las pérdidas hidráulicas son aproximadamente proporcionales al cuadrado de la velocidad, por eso en Hidráulica desde hace mucho las pérdidas hidráulicas de altura de presión se expresan del modo siguiente

$$h = \zeta \frac{v_{med.}^2}{2g} \quad (4.17)$$



y las pérdidas de presión

$$p = h\gamma = \zeta \frac{v_{med}^2}{2g} \gamma.$$

Esta expresión es cómoda, porque incluye el coeficiente adimensional de proporcionalidad  $\zeta$ , que se denomina *coeficiente de resistencia*, y la altura dinámica que forma parte de la ecuación de Bernoulli.

De tal modo, el coeficiente de resistencia  $\zeta$  es la relación entre las pérdidas de altura de presión y la altura dinámica.

Las pérdidas hidráulicas se subdividen habitualmente en dos tipos: pérdidas locales y pérdidas por rozamiento (fricción).

Las pérdidas locales de la energía están condicionadas por las resistencias hidráulicas locales, es decir, por las variaciones locales

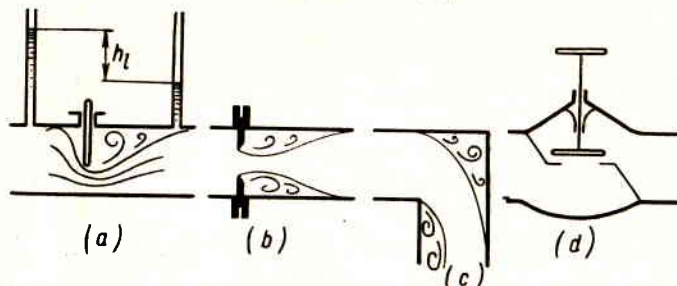


Fig. 30. Esquemas de resistencias locales

de la forma y de las dimensiones del cauce. Al pasar el líquido por las resistencias locales su velocidad varía y surgen generalmente torbellinos.

En la fig. 30 se muestran dispositivos que pueden servir de resistencias locales: compuerta (a), medidor de flujo (b), codo (c) y válvula (d).

Las pérdidas locales de energía se determinan por la fórmula (4.17) del modo siguiente:

$$h_{loc.} = \zeta_{loc.} \frac{v^2}{2g} \quad (4.17')$$

o

$$p_{loc.} = \zeta_{loc.} \frac{v^2}{2g} \gamma,$$

lo que a menudo se denomina fórmula de Weisbach.

Aquí  $v$  es la velocidad media de la sección de la tubería, donde se ha establecido la resistencia local dada <sup>1)</sup>. Si el diámetro de la tubería cambia, variando, por consiguiente, la velocidad, entonces, en calidad de velocidad de cálculo es más cómodo adoptar la mayor de

<sup>1)</sup> El índice «med.» con  $v$  lo emplearemos en lo sucesivo sólo en los casos cuando se puede confundir la velocidad media con la local.

las velocidades, es decir, la que corresponde al menor diámetro de la tubería. Toda resistencia local se caracteriza por un valor del coeficiente de resistencia  $\zeta_{loc.}$ , el cual en muchos casos se puede considerar aproximadamente constante para la forma dada de la resistencia local. Las resistencias hidráulicas locales se examinarán mas detalladamente en el capítulo VIII.

Las pérdidas por rozamiento, o por longitud, son pérdidas de energía que surgen en forma clara en tubos rectos de sección constante, es decir, en casos de corrientes uniformes, y que aumentan proporcionalmente a la longitud del tubo (fig. 31). Estas pérdidas están condicionadas por el rozamiento interior en el líquido, por lo cual tienen lugar tanto en tubos rugosos, como en los lisos.

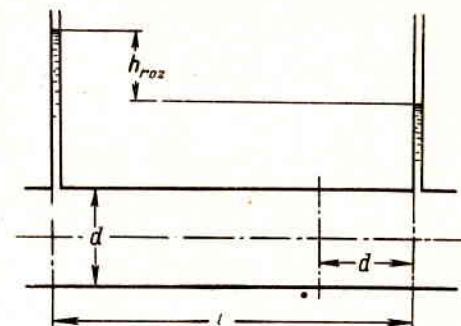


Fig. 31. Pérdida de presión por rozamiento en el tubo

La pérdida de altura de presión por rozamiento se puede expresar mediante la fórmula general para pérdidas hidráulicas (4.17), o sea,

$$h_{roz.} = \zeta_{roz.} \frac{v^2}{2g}, \quad (4.18)$$

pero es más cómodo relacionar el coeficiente  $\zeta_{roz.}$  con la longitud relativa del tubo  $\frac{l}{d}$ .

Tomemos un sector del tubo circular de longitud igual a su diámetro y designemos el coeficiente de su resistencia, que forma parte de la fórmula (4.18), con  $\lambda$ . Entonces, para todo el tubo de longitud  $l$  y diámetro  $d$  (véase la fig. 31) el coeficiente de resistencia será  $\frac{l}{d}$  veces mayor, o sea

$$\zeta_{roz.} = \lambda \frac{l}{d}$$

y en lugar de la fórmula (4.18) tendremos

$$h_{roz.} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (4.18')$$

o

$$p_{roz.} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \gamma. \quad (4.19)$$



La fórmula (4.18') se denomina habitualmente fórmula de Darcy. Denominaremos el coeficiente adimensional  $\lambda$  *coeficiente de pérdidas por rozamiento o coeficiente de resistencia de rozamiento*. Es un coeficiente de proporcionalidad entre la pérdida de altura de presión por rozamiento, por una parte, y el producto de la longitud relativa del tubo por la altura dinámica, por otra.

No es difícil esclarecer el sentido físico del coeficiente  $\lambda$ , si examinamos la condición del movimiento uniforme en el tubo de volumen cilíndrico de longitud  $l$  y diámetro  $d$  (véase la fig. 31), es decir, la equivalencia a cero de la suma de dos fuerzas que actúan sobre el volumen: la de presión y la de rozamiento. Esta igualdad tiene el siguiente aspecto

$$\frac{\pi d^2}{4} p_{\text{roz.}} - \pi dl\tau_0 = 0,$$

De donde, aplicando la fórmula (4.19), se obtiene donde  $\tau_0$  es la tensión de rozamiento en la pared del tubo.

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\gamma \frac{v^2}{2g}}, \quad (4.20)$$

o sea, el coeficiente  $\lambda$  es una magnitud proporcional a la relación entre la tensión de rozamiento sobre la pared del tubo y la presión dinámica calculada según la velocidad media.

Las pérdidas hidráulicas en cauces cerrados, es decir, en tubos, durante el flujo del líquido con sección íntegra (sin superficie libre) tienen lugar a cuenta de la disminución de la energía específica potencial del líquido  $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$  a lo largo del flujo. En este caso, si la energía específica cinética del líquido  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$  varía (a un gasto dado), no es a cuenta de las pérdidas de la energía, sino debido a la modificación de las dimensiones de la sección transversal del cauce, porque la energía depende solamente de la velocidad y ésta se determina por el gasto y el área de la sección

$$v = \frac{Q}{F},$$

donde  $F$  es el área de la sección transversal del cauce.

Por consiguiente, en un tubo de sección constante la velocidad y la energía específica cinética quedan invariables, a pesar de la presencia de resistencias hidráulicas y pérdidas de altura de presión. La magnitud de la pérdida de altura de presión se determina en este caso por la diferencia en las indicaciones de dos piezómetros (véase las figs. 30 y 31).

El cálculo de las pérdidas hidráulicas para diversos casos concretos viene a ser una de las cuestiones principales de la Hidráulica. Los dos capítulos siguientes están dedicados al examen de estas cuestiones.

## § 18. Ejemplos de aplicación de la ecuación de Bernoulli en la técnica

La ecuación de Bernoulli obtenida en los párrafos anteriores es la ley fundamental del movimiento estable del líquido. La ecuación de Bernoulli en la forma obtenida permite examinar y comprender el funcionamiento de diversos dispositivos que se basan en la aplicación de esta ley fundamental. Estudiemos estos dispositivos.

1. El **medidor Venturi o fluidómetro de válvula** es un dispositivo que se instala en las tuberías y realiza la contracción del flujo, o sea, la estrangulación

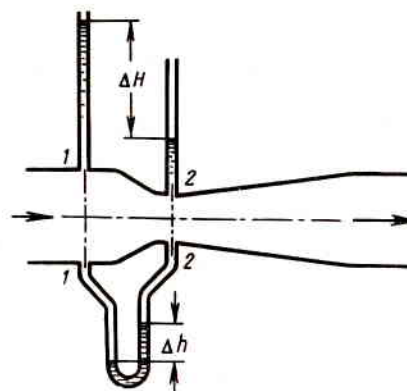


Fig. 32. Esquema de un medidor Venturi

(fig. 32). El fluidómetro consta de un tubo (tobera) que va estrechándose paulatinamente y de otro (difusor) que se ensancha gradualmente. La velocidad del flujo en la parte estrecha aumenta y la presión disminuye. Surge una diferencia (gradiente) de presiones, que se mide con dos piezómetros o un manómetro diferencial en U, y que está ligada de un modo determinado con el gasto. Hallemos esta función.

Supongamos que en la sección 1—1 del flujo, inmediatamente anterior al estrechamiento, tenemos: velocidad  $v_1$ , presión  $p_1$ , área de la sección  $S_1$ ; y en la sección 2—2, es decir, en el lugar más estrecho del flujo,  $v_2$ ,  $p_2$  y  $S_2$  respectivamente. La diferencia entre las indicaciones de los piezómetros unidos a las secciones mencionadas la designaremos con  $\Delta H$ .

Apliquemos para la primera y segunda secciones del flujo las ecuaciones de Bernoulli y la de gasto (considerando uniforme la distribución de velocidades):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{loc.}}; \quad v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

donde  $h_{\text{loc.}}$  es la pérdida de altura de presión entre las secciones 1—1 y 2—2.

Teniendo en cuenta que

$$h_{\text{loc.}} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{y} \quad \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \Delta H,$$

hallemos de este sistema de ecuaciones una de las velocidades, por ejemplo,  $v_2$ ;



tendremos

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g \Delta H}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \zeta}}$$

De donde, el gasto volumétrico será igual a

$$Q = v_2 S_2 = S_2 \sqrt{\frac{2g \Delta H}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \zeta}} \quad (4.21)$$

es decir,

$$Q = C \sqrt{\Delta H}, \quad (4.21')$$

donde  $C$  es una magnitud constante para el medidor dado e igual a

$$C = S_2 \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \zeta}}$$

Conociendo la magnitud de  $C$  y observando las indicaciones de los piezómetros, es fácil determinar el gasto en la tubería para cualquier momento según

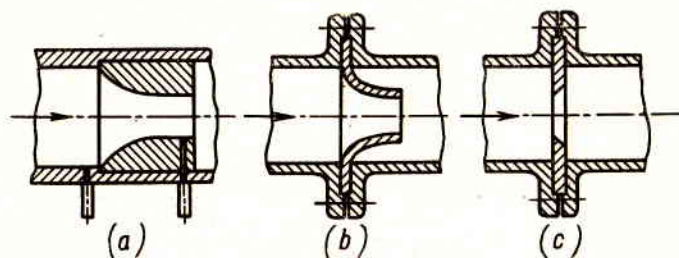


Fig. 33. Esquema de toberas de medición y de diafragma

la fórmula (4.21'). La constante  $C$  se puede calcular teóricamente, pero con mayor exactitud se halla experimentalmente, es decir, calibrando el medidor.

La función de  $\Delta H$  y  $Q$  resulta parabólica, y, si en el eje de abscisas marcamos el cuadrado del gasto, la gráfica de esta función será una línea recta.

A menudo, en lugar de dos piezómetros, para medir el gradiente de presiones, se emplea el manómetro diferencial de mercurio (véase la fig. 32). Teniendo en cuenta que sobre el mercurio en los tubos se halla el mismo líquido de peso específico  $\gamma$ , se puede anotar

$$\Delta H = \Delta h \frac{\gamma_{\text{merc.}} - \gamma}{\gamma}$$

Conviene señalar, que la presencia del difusor no es obligatoria para un medidor Venturi. Este puede hacerse en forma de tobera embutida en el tubo (fig. 33, a) o sujeto entre bridas (fig. 33, b). En este caso tendrá lugar la contracción paulatina del flujo igual a la que se muestra en la fig. 32, pero el ensanchamiento del flujo tras la tobera se verificará espontáneamente e irá acompañado de torbellinos. Por lo tanto, la resistencia en esta tobera es mayor que en la tobera con difusor.

Además, se puede hacer un fluidómetro en forma de diafragma (fig. 33, c), pero hay que tener en cuenta que, debido a la contracción complementaria del

flujo, su sección mínima se encontrará más a la derecha del orificio del diafragma y será algo menor que aquél.

Para los dispositivos enumerados también es justa la fórmula (4.21'), pero con ciertos coeficientes correctivos que se pueden hallar para los tipos standard de fluidómetros en las guías correspondientes.

Los fluidómetros de válvula descritos son los de mayor precisión y se emplean para la calibración (comprobación) de los fluidómetros de aviones.

2. El carburador de los motores de combustión interna y pistón sirve para aspirar la gasolina y mezclarla con el aire (fig. 34). La corriente de aire que ceba el motor se estrecha precisamente junto al pulverizador de la gasolina (extremo del tubo). En esta sección la velocidad del aire aumenta y la presión

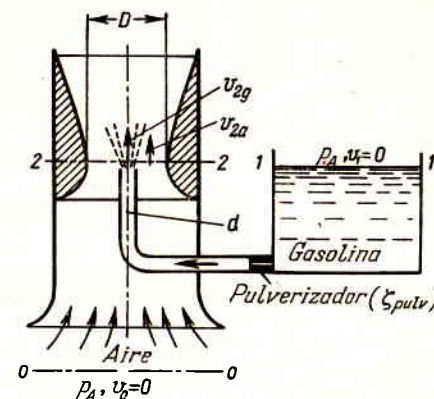


Fig. 34. Esquema de un carburador

según la ley de Bernoulli disminuye. Debido a la disminución de la presión, la gasolina es aspirada y pasa a través del pulverizador a la corriente de aire.

Hállese la relación entre los gastos de peso de la gasolina  $G_g$  y del aire  $G_a$ , teniendo el canal aéreo y el pulverizador las dimensiones  $D$  y  $d$  y siendo los coeficientes de resistencia (hasta la sección 2—2)  $\zeta_a$  y  $\zeta_{\text{eyct.}}$  (la resistencia del tubo de gasolina no se toma en cuenta).

Aplicando la ecuación de Bernoulli para el flujo del aire (sección 0—0 y 2—2) y, después, para el de la gasolina (sección 1—1 y 2—2) obtendremos (siendo  $z_1 = z_2$  y  $\alpha = 1$ )

$$\frac{p_A}{\gamma_a} = \frac{p_2}{\gamma_a} + \frac{v_{2a}^2}{2g} + \zeta_a \frac{v_{2a}^2}{2g};$$

$$\frac{p_A}{\gamma_g} = \frac{p_2}{\gamma_g} + \frac{v_{2g}^2}{2g} + \zeta_{\text{pulv.}} \frac{v_{2g}^2}{2g},$$

de donde

$$\gamma_a \frac{v_{2a}^2}{2g} (1 + \zeta_a) = \gamma_g \frac{v_{2g}^2}{2g} (1 + \zeta_{\text{pulv.}}).$$

Tomando en consideración que los gastos en peso son iguales

$$G_a = \frac{\pi D^2}{4} v_{2a} \gamma_a \quad \text{y} \quad G_g = \frac{\pi d^2}{4} v_{2g} \gamma_g,$$



tendremos

$$\frac{G_g}{G_a} = \left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{\gamma_g (1 + \zeta_a)}{\gamma_a (1 + \zeta_{pulv.})}}$$

3. La bomba de chorro forzado (eyector) está compuesta de la boquilla convergente *A* (fig. 35) que contrae el flujo del tubo, y que gradualmente se ensancha, *C*, instalado a cierta distancia de la boquilla, en la cámara *B*. Debido al aumento de la velocidad del flujo, la presión en el chorro y en toda la cámara *B* disminuye considerablemente. En el tubo ensanchado la velocidad disminuye

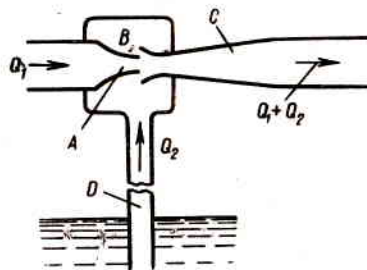


Fig. 35. Esquema de un eyector

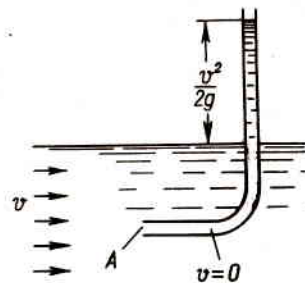


Fig. 36. Esquema de un tubo de presión total

y la presión crece casi hasta la atmosférica (si el líquido se derrama a la atmósfera); por consiguiente, en la cámara *B* la presión es generalmente menor que la atmosférica, es decir, hay vacío.

Este vacío hace que el líquido se aspire del recipiente inferior por el tubo *D* a la cámara *B*, donde los dos flujos se reúnen y siguen mezclándose. Los eyectores

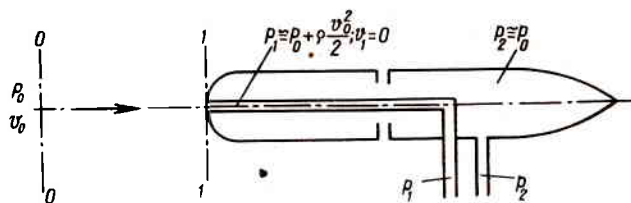


Fig. 37. Esquema de una boquilla de avión para medir la velocidad

se emplean en distintas ramas de la técnica, incluyendo los motores cohetes de combustible líquido.

4. El tubo de presión total (o tubo Pitot) sirve para medir la velocidad de la corriente. Supongamos que el líquido fluye en un cauce abierto con la velocidad *v* (fig. 36). Si colocamos en este flujo un tubo en ángulo recto, con el orificio al encuentro del flujo, el líquido se elevará en este tubo sobre la superficie libre a una altura igual a la dinámica. Eso se explica porque la velocidad de las partículas del líquido que entran en el orificio del tubo disminuye hasta cero, y la presión, por consiguiente, aumenta en la magnitud igual a la presión dinámica. Midiendo la altura del líquido en el tubo, es fácil determinar la velocidad del flujo.

En este principio se funda la medición de la velocidad de vuelo del avión. En la fig. 37 se muestra el esquema del tubo (de la boquilla) de velocidad del

avión para velocidades reducidas de vuelo (en comparación con la velocidad del sonido).

Aplicamos la ecuación de Bernoulli para un filete elemental a lo largo del eje del tubo y que después se desliza por su superficie. Tomando las secciones 0—0 (flujo no turbulento) y 1—1 (donde *v* = 0) tendremos

$$p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} \approx p_1.$$

Puesto que los orificios laterales del tubo reciben aproximadamente la presión del flujo no turbulento,  $p_2 \approx p_0$ ; de lo cual tendremos

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}.$$

5. La sobrealimentación de velocidad se emplea (fig. 38) ampliamente en los aviones para crear presiones elevadas en los depósitos de combustible y otros.

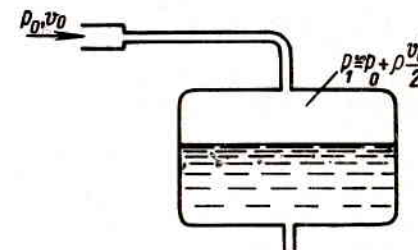


Fig. 38. Esquema de sobrealimentación de velocidad

Si las velocidades de vuelo son reducidas, la presión manométrica en el depósito es aproximadamente igual a la presión dinámica calculada por la velocidad de vuelo y la densidad del aire.



## Regímenes de corriente de líquidos en los tubos. Semejanza hidrodinámica

### § 19. Regímenes de corriente de líquidos en los tubos

Los experimentos demuestran que son posibles dos regímenes o dos tipos de corriente de líquidos y gases en los tubos: laminar y turbulento.

La *corriente laminar* es la formada por capas sin mezclarse las partículas del líquido, ni variar la velocidad. En este caso todas las líneas de corriente se determinan por la forma del cauce por el cual fluye el líquido. Cuando la corriente del líquido, en un tubo recto de sección constante, es laminar, todas las líneas de corriente son paralelas al eje del tubo, es decir, rectas, no surgen desplazamientos transversales de las partículas del líquido, por lo cual el líquido no se mezcla durante el flujo. El piezómetro unido al tubo con corriente laminar indica que la presión (y la velocidad) es invariable en el tiempo y que no hay oscilaciones (pulsaciones). De este modo, la corriente laminar es bastante ordenada y siendo la presión constante, estrictamente estable.

Sin embargo, la corriente laminar no se puede considerar carente de torbellinos, porque aun sin presentar torbellinos bien manifiestos, con el movimiento de traslación surge un movimiento de rotación ordenado de partículas aisladas del líquido alrededor de sus centros instantáneos con velocidades angulares determinadas.

La *corriente turbulenta* es la que va acompañada por una mezcla intensa del líquido y oscilaciones de velocidades y presiones. Cuando la corriente es turbulenta, las líneas de corriente se determinan sólo aproximadamente por la forma del cauce. El movimiento de las partículas resulta desordenado y las trayectorias tienen a veces la forma de curvas complicadas. Esto se debe a que en la corriente turbulenta hay un desplazamiento principal del líquido a lo largo del tubo, pero con desplazamientos transversales y movimiento de rotación de volúmenes del líquido.

En los indicadores de corriente del líquido pueden observarse los regímenes de corriente (véase la fig. 39), que consta del recipiente A con agua, del

tubo de vidrio B con el grifo C en el extremo y de un vaso D con solución de un colorante cualquiera, la cual puede verterse formando un filete a través del tubo F dentro del tubo de vidrio B.

Si abrimos un poco el grifo C y dejamos pasar el agua por el tubo B con velocidad reducida y después, abrimos el grifo E, dejando pasar el colorante al flujo del agua, veremos, que el colorante no se mezcla con el agua del tubo. El filete de colorante se verá claramente a lo largo de todo el tubo de vidrio, lo que indicará el carácter laminar de la corriente del líquido y la ausencia de mezcla. Esto es el régimen laminar de la corriente.

Al aumentar gradualmente la velocidad de la corriente del agua en el tubo B, abriendo el grifo C, el cuadro del flujo al principio no cambia, pero después, a una velocidad determinada de la corriente, el

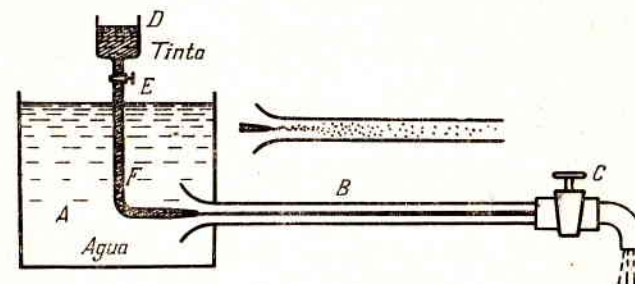


Fig. 39. Esquema de un aparato para demostrar los regímenes de corriente

régimen de ésta cambia rápidamente. El filete del colorante, al salir del tubo, comienza a oscilar, después se difunde y se mezcla con el agua, haciéndose visibles los torbellinos y el movimiento giratorio del líquido. El régimen de la corriente se hace turbulento (véase la parte superior de la fig. 39).

Si disminuimos la velocidad de la corriente, se restablece el régimen laminar.

El cambio del régimen de la corriente en el tubo dado se realiza a determinada velocidad de la corriente que se denomina crítica ( $v_{cr}$ ). Experimentalmente se ha demostrado, que la magnitud de esta velocidad es directamente proporcional al coeficiente cinemático de viscosidad ( $\nu$ ) e inversamente proporcional al diámetro del tubo ( $d$ ), o sea,

$$v_{cr} = k \frac{\nu}{d}.$$

El coeficiente adimensional de proporcionalidad  $k$  tiene significación universal, es decir, es el mismo para todos los líquidos y gases y para cualquier diámetro de tubo.

Esto significa, que el cambio del régimen de la corriente tiene lugar cuando la relación entre la velocidad, el diámetro y la viscosidad  $\nu$



tiene un valor determinado e igual a

$$k = \frac{v_{cr} \cdot d}{\nu}$$

Este número adimensional se denomina *número crítico de Reynolds* (en honor del sabio inglés que estableció este hecho) y se designa

$$Re_{cr.} = \frac{v_{cr} \cdot d}{\nu} \quad (5.1)$$

Como muestran los experimentos, el número crítico de Reynolds es aproximadamente igual a 2.300.

Sin embargo, se puede hablar no solamente del número crítico  $Re_{cr.}$  que corresponde al cambio del régimen, sino también del número real de Reynolds para diferentes flujos y expresarlo por la velocidad real, es decir,

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (5.2)$$

De este modo, obtenemos el criterio que permite juzgar el régimen de corriente del líquido en un tubo. Puesto que la corriente laminar tiene lugar a velocidades reducidas, si  $Re < Re_{cr.}$ , la corriente siempre debe ser laminar. Si  $Re > Re_{cr.}$ , la corriente es generalmente turbulenta.

Conociendo la velocidad de la corriente del líquido, el diámetro del tubo y la viscosidad del líquido, se puede calcular el régimen de la corriente del líquido, lo que es muy importante para los cálculos hidráulicos posteriores.

En la práctica las corrientes laminares se observan cuando por los tubos fluyen líquidos muy viscosos, por ejemplo, aceites lubricantes, mezclas de glicerina, etc.

Las corrientes turbulentas generalmente tienen lugar en conducciones de agua y en los tubos por los cuales fluye gasolina, keroseno, alcoholes y ácidos. De este modo, en el avión tropezamos tanto con el régimen laminar como con el turbulento de la corriente. En los sistemas de aceite y las transmisiones hidráulicas de los aviones, el régimen de la corriente es por lo general laminar, y en los sistemas de combustible, turbulento.

El cambio de los regímenes de la corriente, al alcanzar el número  $Re_{cr.}$  se explica por el hecho de que un régimen de la corriente pierde la estabilidad, y el otro la adquiere. Si  $Re < Re_{cr.}$ , el régimen laminar es estable: la provocación de turbulencia artificial del flujo y su perturbación (estremecimiento del tubo, inmersión de un cuerpo oscilante en el flujo y otros) son eliminadas por la viscosidad y el flujo laminar se restablece. El régimen turbulento en este caso no es estable.

Si  $Re > Re_{cr.}$ , el régimen turbulento es, al contrario, estable y el laminar, inestable.

El número crítico  $Re_{cr.}$ , que corresponde al paso del régimen laminar al turbulento, es generalmente algo mayor que  $Re_{cr.}$  para el paso

inverso. En el laboratorio, cuando no hay factores que contribuyen a la turbulencia del flujo, se logra obtener un régimen laminar con números  $Re$  considerablemente mayores que  $Re_{cr.}$  Pero en estos casos, la corriente laminar resulta tan inestable, que basta una sacudida insignificante para que el flujo laminar se convierta rápidamente en turbulento. En la práctica, particularmente en las tuberías del avión, existen, por lo general, condiciones que contribuyen al surgimiento de la turbulencia: la vibración de los tubos, resistencias hidráulicas locales, irregularidad (pulsación) del gasto y otros; por eso, el efecto indicado tiene en Hidráulica más bien una importancia de principio, que práctica <sup>1</sup>.

El problema de la estabilidad del régimen laminar y del mecanismo de la turbulencia no está aún teóricamente resuelto. Pero las investigaciones muestran, que en una sección dada de un tubo cilíndrico, factores tales como distancia de la pared, magnitud de la velocidad y de su gradiente  $dv/dy$  contribuyen al surgimiento de la turbulencia. La distancia máxima de la pared y la velocidad máxima están en el centro del flujo, pero el gradiente  $dv/dy$  allí es igual a cero. Cerca de la pared, al contrario, el gradiente de la velocidad es máximo y la velocidad y las distancias  $y$  son mínimas y hasta iguales a cero. Por eso, la turbulencia inicial del flujo laminar en un tubo recto de sección constante comienza en cierto punto entre el eje del tubo y la pared, pero a pesar de todo más cerca a la pared.

## § 20. Semejanza hidrodinámica

El número de Reynolds obtenido en el párrafo anterior tiene gran importancia en Hidráulica y también en Aerodinámica, porque es uno de los principales criterios de la semejanza hidrodinámica. La *semejanza hidrodinámica* es la semejanza de flujos de líquido incompresible e incluye la semejanza geométrica, cinemática y dinámica.

La *semejanza geométrica*, como es sabido de la Geometría, significa la proporcionalidad entre dimensiones similares y la igualdad de los ángulos correspondientes. En Hidráulica se entiende por semejanza geométrica la semejanza de las superficies que limitan los flujos de los líquidos, es decir, la semejanza de los cauces y su posición similar respecto al horizonte (fig. 40).

La *semejanza cinemática* es la semejanza de las líneas de corriente y la proporcionalidad de las velocidades similares. Es evidente, que para la semejanza cinemática de los flujos es indispensable la semejanza geométrica de los cauces.

La *semejanza dinámica* significa la proporcionalidad de las fuerzas, que actúan sobre elementos similares de los flujos cine-

<sup>1</sup>) Dicha circunstancia tiene importancia práctica en la aerodinámica del ala (alas laminarizadas)



mláticamente semejantes y la igualdad de los ángulos que caracterizan la dirección de estas fuerzas.

En los flujos de los líquidos actúan por lo general diferentes fuerzas: las de presión, de viscosidad (de rozamiento), de gravitación, etc. La observancia de la proporcionalidad entre todas estas fuerzas nos da la semejanza hidrodinámica completa.

Por ejemplo, la proporcionalidad de las fuerzas de presión  $P$  y de rozamiento  $T$  que actúan sobre volúmenes semejantes en los flujos I y II se puede anotar así:

$$\left(\frac{P}{T}\right)_I = \left(\frac{P}{T}\right)_{II}$$

En la práctica es bastante difícil obtener la semejanza hidrodinámica completa; por eso, habitualmente, se trata de la semejanza parcial

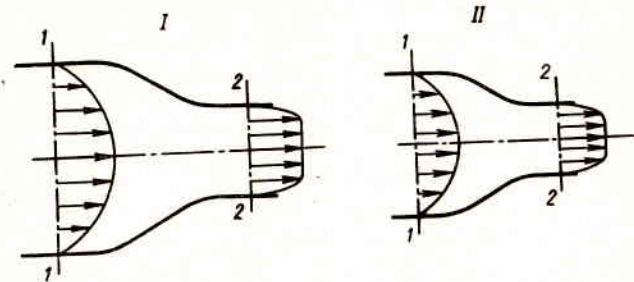


Fig. 40. Flujos semejantes

(incompleta), cuando se observa sólo la proporcionalidad de las fuerzas principales. Para las corrientes de empuje en cauces cerrados, es decir, para los flujos en tubos, en máquinas hidráulicas, etc., estas fuerzas principales, como muestran los cálculos, son las fuerzas de presión, de rozamiento y sus resultantes. Estas últimas, como se puede demostrar para flujos semejantes, son proporcionales al producto de la presión dinámica  $\frac{\rho v^2}{2}$  por la superficie característica  $S$ .

Efectivamente, para una partícula de líquido, una de cuyas dimensiones es igual a  $\Delta l$ , la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración, o sea

$$\Delta F = k\rho (\Delta l)^3 \frac{dv}{dt} = k\rho (\Delta l)^3 \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = k\rho (\Delta l)^3 v \frac{dv}{ds},$$

donde  $k$  es el coeficiente de proporcionalidad adimensional, que depende de la forma de la partícula;

$ds$  es el recorrido elemental de la partícula.

Multipliquemos y dividamos la última expresión por  $l^2$  y  $v_{med.}^2$ , es decir, admitamos además de las magnitudes que se refieren a la

partícula, las semejantes que caracterizan todo el flujo; tendremos

$$\Delta F = k \frac{\Delta l}{ds} \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 \frac{v}{v_{med.}} d\left(\frac{v}{v_{med.}}\right) \rho v_{med.}^2 l^2.$$

Estos cinco multiplicadores adimensionales en la expresión para  $\Delta F$  tienen el mismo valor para los flujos geométrica y cinemáticamente semejantes y partículas similares. Por consiguiente, sustituyendo el signo de igualdad por el de proporcionalidad, se puede anotar para estos flujos

$$\Delta F \sim \rho v_{med.}^2 l^2,$$

o, puesto que  $l^2 \sim S$  y  $\Delta F \sim F$ , definitivamente tendremos

$$F \sim \rho v_{med.}^2 S. \quad (5.3)$$

Para los flujos semejantes I y II tendremos

$$\frac{F_I}{F_{II}} = \frac{(\rho v_{med.}^2 S)_I}{(\rho v_{med.}^2 S)_{II}},$$

o

$$\left(\frac{F}{\rho v_{med.}^2 S}\right)_I = \left(\frac{F}{\rho v_{med.}^2 S}\right)_{II}.$$

La última igualdad, idéntica para flujos semejantes, se denomina número de Newton y se designa  $Ne$ .

Señalemos de paso que al producto  $\rho v_{med.}^2 S$  en los flujos semejantes le son proporcionales las fuerzas con las cuales el flujo actúa (o es capaz de actuar) sobre los obstáculos: paredes sólidas, paletas de las máquinas hidráulicas, cuerpos bañados por el flujo, etc. Así, por ejemplo, si el flujo del líquido tropieza con una pared ilimitada (véase la fig. 41), normal a éste, y como resultado, es desviado por la pared y cambia su dirección en  $90^\circ$ , basándose en el teorema de la Mecánica sobre la cantidad de movimiento, el impulso de fuerza en un segundo es igual a

$$P = \rho Qv = \rho v^2 S. \quad (5.4)$$

Esta es la fuerza de acción sobre un obstáculo. Si la pared está colocada bajo otro ángulo o su forma o dimensión es otra, en lugar de la unidad, el coeficiente de proporcionalidad será otro.

Al principio analicemos el caso más sencillo: el movimiento de un líquido perfecto en un plano horizontal, es decir, cuando no hay fuerzas de viscosidad y no influye la fuerza de gravitación.

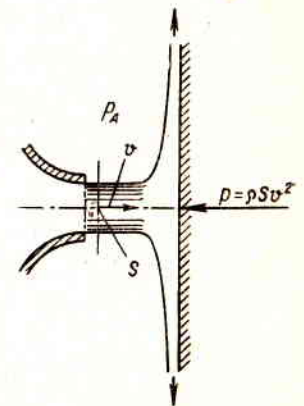


Fig. 41. Acción del flujo sobre un obstáculo



Para este caso  $z_1 = z_2$  y la ecuación de Bernoulli para las secciones 1—1 y 2—2 (véase la fig. 40) tiene la siguiente expresión:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g};$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \frac{v_2^2}{2}} = 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Para dos flujos con semejanza geométrica, la parte derecha de la ecuación tiene el mismo valor: por consiguiente, la parte izquierda es también igual, es decir, las diferencias de presiones son proporcionales a las presiones dinámicas:

$$\left( \frac{\Delta p}{\rho v^2} \right)_I = \left( \frac{\Delta p}{\rho v^2} \right)_{II}. \quad (5.5)$$

De este modo, durante el movimiento de un líquido perfecto incompresible sin la influencia de la fuerza de gravitación, para asegurar la semejanza hidrodinámica basta con la semejanza geométrica. La magnitud adimensional que representa la relación entre la diferencia de presiones y la presión dinámica (o entre la diferencia de alturas piezométricas y hacia la dinámica) se denomina *coeficiente de presión* o *número de Euler* y se designa con *Eu*.

Veamos qué condición deben satisfacer los mismos flujos de semejanza geométrica para que haya semejanza hidrodinámica en caso de existir fuerzas de viscosidad y, por consiguiente, pérdidas de energía, es decir, en qué condición los números *Eu* serán iguales para estos flujos.

La ecuación de Bernoulli ahora se expresará del modo siguiente:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g},$$

$$\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho v_2^2} = Eu = \alpha_2 - \alpha_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} + \zeta. \quad (5.6)$$

Como se ve de la ecuación (5.6), los números *Eu* tendrán igual valor para los flujos que se estudian, y éstos tendrán semejanza hidrodinámica, a condición de que los coeficientes de resistencia sean iguales (la igualdad de los coeficientes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para las secciones similares de dos flujos se deriva de su semejanza cinemática). De este modo, los coeficientes  $\zeta$  en los flujos semejantes deben ser iguales y esto significa que las pérdidas de presión en sectores similares (véase la fig. 40) son proporcionales a las presiones dinámicas, o sea,

$$\left( \frac{h_{1-2}}{\frac{v_2^2}{2g}} \right)_I = \left( \frac{h_{1-2}}{\frac{v_2^2}{2g}} \right)_{II}.$$

Analicemos un caso de movimiento del líquido muy importante en la Hidráulica: el movimiento con rozamiento en un tubo cilíndrico, para el cual (véase § 16)

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d}.$$

Para los flujos con semejanza geométrica, la relación  $\frac{l}{d}$  es la misma, por consiguiente, la condición de semejanza hidrodinámica en este caso consiste en el valor igual del coeficiente  $\lambda$  para dichos flujos. Conforme a la fórmula (4.20), este coeficiente se expresa por la tensión de rozamiento en la pared  $\tau_0$  y la presión dinámica del modo siguiente

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho \frac{v^2}{2}}.$$

Luego, para dos flujos semejantes I y II se puede escribir

$$\left( \frac{\tau_0}{\rho v^2} \right)_I = \left( \frac{\tau_0}{\rho v^2} \right)_{II}, \quad (5.7)$$

es decir, las tensiones de rozamiento son proporcionales a las presiones dinámicas.

Si tomamos en consideración la ley de rozamiento de Newton, en vez de la proporción anterior tendremos la siguiente:

$$\left[ \frac{\mu \left( \frac{dv}{dy} \right)_0}{\rho v^2} \right]_I = \left[ \frac{\mu \left( \frac{dv}{dy} \right)_0}{\rho v^2} \right]_{II}.$$

Pero, puesto que en caso de semejanza cinemática tiene lugar la proporcionalidad

$$\frac{dv}{dy} \sim \frac{v}{d}.$$

entonces

$$\left( \frac{\mu \frac{v}{d}}{\rho v^2} \right)_I = \left( \frac{\mu \frac{v}{d}}{\rho v^2} \right)_{II}.$$

Hechas las transformaciones obtendremos la condición de semejanza de los flujos, tomando en cuenta las fuerzas de viscosidad

$$\left( \frac{v}{vd} \right)_I = \left( \frac{v}{vd} \right)_{II},$$

o pasando a los valores inversos,

$$Re_I = Re_{II}. \quad (5.8)$$

En esto consiste la ley de semejanza de Reynolds, la cual se puede formular así: para la semejanza hidrodinámica



de flujos geoméricamente semejantes, tomando en cuenta las fuerzas de viscosidad, se necesita la igualdad de los números de Reynolds calculados para cualquier par de secciones similares de estos flujos.

Ahora está claro por qué el paso de la corriente de un régimen a otro tiene lugar con un  $N_{Re}$  determinado y también se esclarece el sentido físico de este número para el flujo en un tubo, que es la magnitud que caracteriza la relación de la presión dinámica a la tensión de rozamiento. Cuanto mayores son la velocidad y las dimensiones transversales del flujo y menor es la viscosidad del líquido, mayor es el número  $Re$ . Para el flujo de un líquido perfecto el número  $Re$  es infinitamente grande, porque la viscosidad  $\gamma = 0$ .

En los casos en que en la ecuación de Bernoulli no se puede despreciar la diferencia de las alturas de posición, la cuestión de la semejanza se complica, porque es necesario apelar a un criterio de semejanza más: el número de Froude, que toma en consideración la influencia de la fuerza de gravitación sobre el movimiento del líquido. Pero, para la inmensa mayoría de los problemas que nos interesan en la técnica de aviación este criterio no tiene importancia, por lo que no lo vamos a analizar.

De tal modo, en los flujos semejantes tenemos la igualdad de coeficientes adimensionales y valores  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $Eu$ ,  $Ne$ ,  $Re$  y algunos otros que se estudiarán a continuación. El cambio del número  $Re$  significa que se modifica la relación de las fuerzas principales en el flujo, por lo cual los coeficientes indicados pueden variar también. Por eso todos estos coeficientes se deben considerar como función del número  $Re$ .

## § 21. Cavitación

En algunos casos, durante el movimiento del líquido en cauces cerrados ocurren fenómenos ligados con la variación del estado del líquido, es decir, con su evaporación, así como con el desprendimiento de los gases disueltos en el líquido.

Por ejemplo, durante el flujo del líquido a través de un estrechamiento local del tubo surge el aumento de la velocidad y la caída de presión. Si la presión absoluta alcanza un valor igual a la presión del vapor saturado de este líquido a una temperatura dada, en este lugar del flujo comienza la formación intensiva de vapor y el desprendimiento de gases, es decir, la ebullición local del líquido. En la parte donde el flujo se ensancha, la velocidad disminuye, pero la presión aumenta, y la ebullición cesa; el vapor desprendido se condensa parcial o totalmente y los gases se disuelven poco a poco.

Esta ebullición local del líquido condicionada por la caída de la presión local en el flujo con la subsiguiente condensación de los vapores en los lugares de presión elevada se denomina *cavitación*.

Dicho fenómeno se puede demostrar claramente en un dispositivo muy sencillo (fig. 42). El agua u otro líquido se impulsa a la presión de varias atmósferas a la válvula y después fluye a través del tubo de cristal, el cual, al principio, se contrae gradualmente, contrayendo el flujo, y después se ensancha aún más gradualmente y sale a la atmósfera.

Si abrimos un poco la válvula y, por consiguiente, obtenemos pequeños valores del gasto y de la velocidad, la caída de presión en el estrechamiento del tubo será insignificante, el flujo será bastante

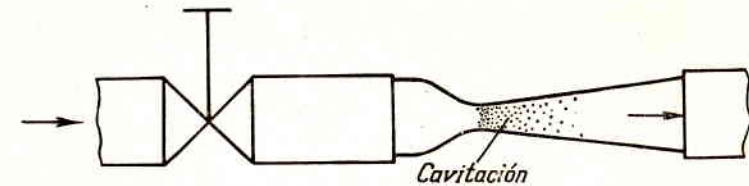


Fig. 42. Esquema de un tubo para demostrar la cavitación

transparente y la cavitación no se observará. Abriendo gradualmente la válvula aumenta la velocidad en el tubo y la presión absoluta decae.

Si  $p_{abs} = p_t$ , donde  $p_t$  es la presión de vapor saturado, en el tubo aparece una zona bien visible de cavitación cuyas dimensiones aumentarán según se vaya abriendo la válvula.

La cavitación va acompañada de un ruido característico, sacudidas, y en caso de prolongarse, por la destrucción erosiva de las paredes metálicas, debido a que la condensación de las burbujas del vapor se efectúa a velocidad considerable y las partículas del líquido, que llenan la cavidad de la burbuja en condensación, se precipitan a su centro y en el momento de finalizar la condensación provocan un choque hidráulico local, es decir, un aumento local considerable de presión. El deterioro provocado por la cavitación no ocurre en el lugar donde se desprenden las burbujas, sino donde éstas se condensan.

La cavitación es un fenómeno indeseable y no se debe tolerar en tuberías y otros sistemas hidráulicos. Cuando surge la cavitación aumenta considerablemente la resistencia de las tuberías y, por consiguiente, disminuye su rendimiento.

La cavitación puede surgir en todos los dispositivos donde el flujo experimenta un estrechamiento local con un ensanchamiento ulterior, por ejemplo, en los grifos, válvulas, compuertas, diafragmas, eyectores, etc. En ciertos casos el surgimiento de la cavitación es posible también sin ensanchamiento del flujo inmediatamente después de su contracción, así como en los tubos de sección constante al aumentar la altura de posición y las pérdidas hidráulicas.

La cavitación puede tener lugar en las máquinas hidráulicas (bombas y turbinas hidráulicas), así como en las paletas de las hélices con



gran número de revoluciones. En estos casos, la cavitación disminuye bruscamente el rendimiento de la máquina y deteriora progresivamente las piezas.

En los sistemas hidráulicos del avión la cavitación puede surgir a causa de disminuir la presión exterior durante el ascenso. En este caso, el efecto de la cavitación se extiende a una parte considerable de la tubería de presión baja (tubería de aspiración) e inclusive a toda la tubería. El flujo en la tubería se hace bifásico, compuesto de la fase líquida y de vapor.

En la etapa inicial de la evaporación, la fase de vapor puede tener la forma de pequeñas burbujas distribuidas uniformemente en el volu-

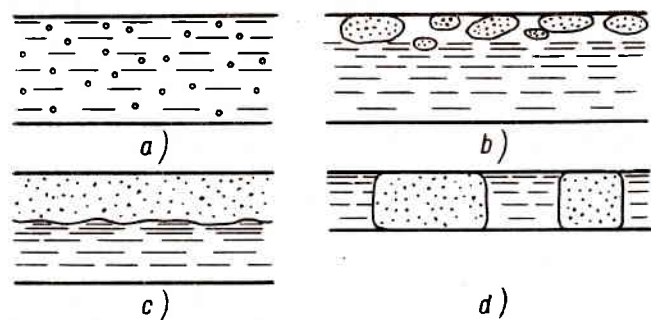


Fig. 43. Esquemas de flujos del líquido con aire

men del líquido en movimiento (fig. 43, a). Si la evaporación continúa, la fase de vapor crece y la burbujas aumentan en volumen, moviéndose preferentemente a la parte superior de la sección de la tubería (fig. 43, b). Finalmente se separan completamente las fases de vapor y líquida y se mueven como flujos independientes: la primera, en la parte superior de la sección de la tubería y, la segunda, en la inferior (fig. 43, c). Si el diámetro de la tubería es pequeño, pueden surgir tapones de vapor y el movimiento de las fases será en forma de columnas alternantes (fig. 43, d).

Es evidente, que con el aumento de la fase de vapor el rendimiento de la tubería disminuye considerablemente. La condensación (parcial o completa) de los vapores desprendidos tiene lugar en la bomba, donde la presión aumenta mucho, y en la tubería, por la cual el líquido fluye a gran presión de la bomba al consumidor.

La cavitación se manifiesta de diferentes modos en los líquidos de un componente (simples) y de varios componentes (complejos). Para los líquidos de un componente, la presión, que corresponde al comienzo de la cavitación, se determina plenamente por la presión de vapor saturado, que depende sólo de la temperatura, y el fenómeno de la cavitación transcurre como se ha descrito más arriba.

El líquido de varios componentes consta de fracciones volátiles y pesadas. Las primeras tienen mayor presión de vapor que las segundas, por lo cual, durante la cavitación, primero comienza la ebullición de las fracciones volátiles y después la de las pesadas. La condensación de los vapores ocurre en el orden inverso: primero se condensan las fracciones pesadas y después, las volátiles.

Si los líquidos de varios componentes contienen fracciones volátiles, son más propensos a la cavitación y la fase de vapor en éstos dura más tiempo, pero el proceso de la cavitación no se manifiesta con tanta brusquedad como en los líquidos de un componente.

**Ejemplo.** Determinése el régimen de corriente del líquido AMF—10 en la tubería de diámetro  $d = 12$  mm del sistema hidráulico del avión, si el caudal  $Q = 0,25$  l/seg, la temperatura del líquido es  $0^\circ\text{C}$  (véase la tabla 1 en la pág 19). ¿A que temperatura cambiará el régimen de la corriente?

**Solución.** 1. De la tabla 1 hallamos  $\nu = 42$  centistokes  $= 0,42$  cm<sup>2</sup>/seg.

2. Determinamos el número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} = \frac{4 \cdot 250}{\pi \cdot 1,2 \cdot 0,42} = 632.$$

El régimen de la corriente es laminar.

3. Hallamos el valor de viscosidad que corresponde al cambio del régimen de la corriente.

$$\nu_{\text{cr.}} = \frac{4Q}{\pi d \text{Re}_{\text{cr.}}} = \frac{4 \cdot 250}{\pi \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 300} = 0,115 \text{ cm}^2/\text{seg}.$$

Construimos la gráfica para el coeficiente  $\nu$  en función de la temperatura, según los datos de la tabla 1, para el líquido AMF—10 y hallamos que  $t_{\text{cr}} = 40^\circ\text{C}$ .



## Corriente laminar

### § 22. Teoría de la corriente laminar del líquido en un tubo circular

Como se ha indicado en el § 19, la corriente laminar es estrictamente ordenada, por capas, sin mezclarse el líquido; se subordina a la ley de rozamiento de Newton (véase § 4) y se determina completamente por ésta. Por eso, la teoría de la corriente laminar del líquido se funda en la ley de rozamiento de Newton.

Tomemos bastante alejado del extremo del tubo horizontal de diámetro  $d = 2r_0$  un segmento recto comprendido entre dos secciones

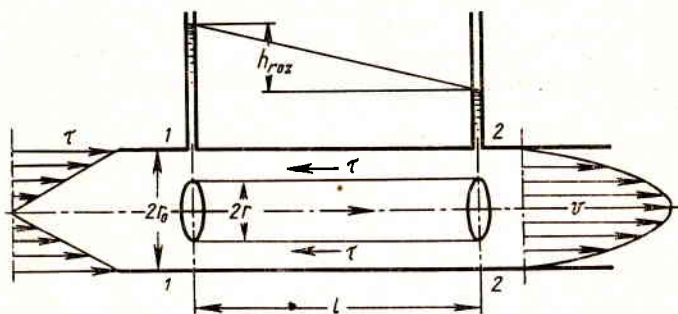


Fig. 44. Esquema para ilustrar la teoría de la corriente laminar en el tubo

1—1 y 2—2, la distancia entre las cuales es igual a  $l$  (fig. 44). Supongamos que la presión en la primera sección es  $p_1$ , y en la segunda,  $p_2$ . Puesto que el diámetro del tubo es constante, la velocidad y el coeficiente  $\alpha$  serán invariables a lo largo del tubo, por lo cual la ecuación de Bernoulli para las secciones escogidas será

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + h_{roz},$$

donde  $h_{roz}$ , es la pérdida de altura de presión por rozamiento.

De donde

$$h_{roz} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{p_{roz}}{\gamma},$$

lo que precisamente indican los piezómetros instalados en las secciones.

Escojamos en el flujo del líquido un volumen cilíndrico de radio  $r$  coaxial con el tubo y con bases en las secciones escogidas.

Escribamos la ecuación del movimiento uniforme del volumen escogido, o sea, la igualdad a cero de la suma de las dos fuerzas que actúan sobre el volumen: la fuerza de presión y la de resistencia. Designando la tensión tangencial en la superficie lateral del cilindro con  $\tau$ , tendremos

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0,$$

de donde

$$\tau = \frac{p_{roz} \cdot r}{2l}.$$

De la fórmula se ve que las tensiones tangenciales en la sección transversal del tubo cambian según la ley lineal en función del radio. La representación gráfica de la tensión tangencial se muestra en la misma fig. 44, a la izquierda.

Expresemos la tensión tangencial  $\tau$  de acuerdo con la ley de rozamiento de Newton por medio del coeficiente de viscosidad y el gradiente transversal de velocidad [fórmula (1.11)]; sustituyamos también la variable  $y$  (distancia de la pared) por el radio corriente  $r$ :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = -\mu \frac{dv}{dr}.$$

El signo «menos» está condicionado por que el sentido de la lectura de  $r$  es opuesto al de  $y$ .

Introduciendo el valor  $\tau$  en la ecuación anterior, tendremos

$$\frac{p_{roz} \cdot r}{2l} = -\mu \frac{dv}{dr}.$$

De la ecuación anterior despejamos el incremento de velocidad  $dv$ :

$$dv = -\frac{p_{roz}}{2\mu l} r dr.$$

Al incremento positivo del radio corresponde el negativo (o sea, la disminución) de la velocidad, lo que corresponde al perfil de velocidades expuesto en la fig. 44.

Ejecutando la integración resulta

$$v = -\frac{p_{roz}}{2\mu l} \cdot \frac{r^2}{2} + C.$$

La constante de integración  $C$  se halla por las condiciones en la pared, donde si  $r = r_0$ ,  $v = 0$ , por consiguiente,

$$C = \frac{p_{roz}}{4\mu l} r_0^2.$$



De donde la magnitud de la velocidad en la circunferencia con radio  $r$  será igual a:

$$v = \frac{p_{roz.}}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (6.1)$$

Esta es la ley de distribución de la velocidad por la sección de un tubo circular en caso de corriente laminar. La curva que representa gráficamente la velocidad es una parábola de segundo grado.

La velocidad máxima en el centro de la sección (si  $r = 0$ ) es igual a

$$v_{m\acute{a}x.} = \frac{p_{roz.}}{4\mu l} r_0^2. \quad (6.2)$$

La proporción  $\frac{p_{roz.}}{l}$  que forma parte de la fórmula (6.1), como se ve de la fig. 44, representa la pendiente hidráulica (piezométrica) multiplicada por  $\gamma$ . Esta magnitud es invariable a lo largo de un tubo recto de diámetro constante.

Apliquemos la ley de distribución de la velocidad (6.1) para calcular el gasto.

Para eso expresamos primero el gasto elemental por una superficie infinitesimal  $dS$

$$dQ = v dS.$$

Aquí  $v$  es función del radio y se determina por la fórmula (6.1); la superficie  $dS$  conviene elegirla en forma de anillo con el radio  $r$  y la anchura  $dr$  (fig. 45), entonces

$$dQ = \frac{p_{roz.}}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr.$$

Después de integrar toda la superficie de la sección transversal, es decir, desde  $r = 0$  hasta  $r = r_0$ , tendremos

$$Q = \frac{\pi p_{roz.}}{2\mu l} \int_{r=0}^{r=r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi p_{roz.}}{8\mu l} r_0^4. \quad (6.3)$$

La velocidad media en la sección se halla dividiendo el gasto por la superficie:

$$v_{med.} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\pi p_{roz.} r_0^4}{8\mu l \pi r_0^2} = \frac{p_{roz.}}{8\mu l} r_0^2. \quad (6.4)$$

Comparando esta expresión con la fórmula (6.2) llegamos a la conclusión de que en la corriente laminar la velocidad media es dos veces

menor que la máxima, es decir,

$$v_{med.} = \frac{1}{2} v_{m\acute{a}x.}$$

Para obtener la ley de resistencia, es decir, la expresión de la pérdida de altura de presión por rozamiento  $h_{roz.}$  por medio del caudal y las dimensiones del tubo, se determina  $p_{roz.}$  por la ecuación (6.3); tendremos

$$p_{roz.} = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4}.$$

Dividiendo la ecuación por  $\gamma$ , obtendremos la pérdida de altura de presión:

$$h_{roz.} = \frac{p_{roz.}}{\gamma} = \frac{8\mu l Q}{\pi r_0^4 \gamma}.$$

Sustituyendo  $\mu$  por  $\nu\rho$  y  $\gamma$  por  $g\rho$ , y pasando de  $r_0$  a  $d = 2r_0$ , tendremos definitivamente

$$h_{roz.} = \frac{128\nu l Q}{\pi g d^4}. \quad (6.5)$$

La ley de resistencia obtenida muestra, que en caso de corriente laminar, en un tubo circular, la pérdida de altura de presión por rozamiento es proporcional al gasto y a la viscosidad y a la primera potencia y es inversamente proporcional al diámetro a la cuarta potencia. Esta ley, denominada a menudo ley de Poiseuille-Hagen, se emplea para el cálculo de tuberías con régimen laminar de corriente.

Más arriba (§ 17) hemos convenido en expresar las pérdidas de altura de presión por rozamiento con la velocidad media, según la fórmula (4.18). Reduzcamos la ley de resistencia (6.5) a la forma siguiente:

$$h_{roz.} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{med.}^2}{2g}.$$

Para eso, en (6.5) sustituiremos el gasto por el producto  $\frac{\pi d^2}{4} v_{med.}$ ; después de reducir se obtiene

$$h_{roz.} = \frac{64\nu l v_{med.}}{2g d^2}.$$

Después de multiplicar y dividir por  $v_{med.}$  y de reagrupar los multiplicadores, tendremos

$$h_{roz.} = \frac{64\nu}{v_{med.} d} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{med.}^2}{2g} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{med.}^2}{2g},$$

la cual es semejante a (4.18'), por lo tanto,

$$h_{roz.} = \lambda_l \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{med.}^2}{2g}, \quad (6.6)$$



donde

$$\lambda_l = \frac{64^*)}{Re} \quad (6.7)$$

Hay que tener en cuenta que la pérdida de altura de presión por rozamiento en una corriente laminar es proporcional a la velocidad a la primera potencia. No se debe olvidar que el cuadrado de la velocidad en la fórmula (6.6) para la corriente laminar ha sido obtenido artificialmente, multiplicando y dividiendo por  $v_{med.}$  y que el coeficiente  $\lambda_l$  es inversamente proporcional al número  $Re$  y, por consiguiente, a la velocidad  $v_{med.}$

La teoría expuesta de la corriente laminar del líquido en un tubo circular se confirma, en forma general, con experimentos y la ley de resistencia deducida no necesita generalmente correcciones, excepto en los siguientes dos casos:

1) Cuando la corriente pasa por el sector inicial del tubo, donde tiene lugar la formación gradual del perfil parabólico de las velocidades. La resistencia en este sector resulta mayor que en los sectores posteriores del tubo. Pero, esa circunstancia se toma en cuenta solamente al calcular tubos muy cortos. Más detalladamente esta cuestión se examina en el párrafo siguiente.

2) Cuando la corriente pasa con intercambio térmico considerable, es decir, cuando el movimiento del líquido va acompañando por calentamiento o enfriamiento. La resistencia en este caso es algo mayor que la común.

### § 23. Sector inicial de la corriente laminar. Coeficiente $\alpha$

Si el líquido pasa de cualquier depósito a un tubo recto de diámetro constante y fluye por éste de modo laminar, la distribución de velocidades resulta, al principio, prácticamente uniforme, especialmente si la entrada está redondeada (fig. 46). Pero después, bajo la

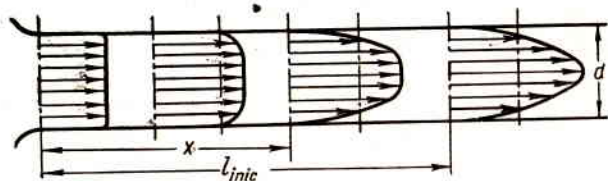


Fig. 46. Formación del perfil parabólico de velocidades

acción de las fuerzas de viscosidad, se verifica la siguiente redistribución de velocidades en las secciones: las capas del líquido cercanas a la pared se frenan, y la parte central del flujo (núcleo), donde se conserva

\*) El índice «l» junto a  $\lambda$  está puesto para subrayar que aquí se trata de una corriente laminar.

todavía la distribución uniforme de velocidades, fluye con aceleración, lo que está condicionado por la necesidad de dejar pasar un gasto determinado por una sección invariable. El espesor de las capas del líquido frenado va aumentando gradualmente hasta llegar a ser igual al radio del tubo, es decir, hasta que las capas próximas a las paredes opuestas se unan en el eje del tubo (véase la fig. 46). Solamente entonces se establece el perfil parabólico de la velocidad, característico para la corriente laminar.

La parte desde el extremo del tubo, en la cual se establece (se estabiliza) el perfil parabólico de la velocidad se denomina sector inicial de la corriente ( $l_{inic.}$ ). Fuera de los límites del sector inicial, tenemos una corriente laminar estabilizada; el perfil parabólico de la velocidad queda invariable, cualquiera que sea la longitud del tubo, si se observa la condición de que el tubo sea recto y su sección constante. La teoría de la corriente laminar expuesta más arriba es justa precisamente para esta corriente laminar estabilizada y no es aplicable en los límites del sector inicial.

Para determinar la longitud del sector inicial se puede emplear la siguiente fórmula aproximada, que expresa dicha longitud referida al diámetro del tubo como función del número de Reynolds:

$$\frac{l_{inic.}}{d} = 0,029 Re. \quad (6.8)$$

Introduciendo en la fórmula (6.8)  $Re_{cr.} = 2.300$ , obtendremos la longitud máxima posible del sector inicial, igual a 66,5 diámetros.

Como se ha indicado más arriba, la resistencia en el sector inicial del tubo resulta mayor que en los siguientes. Esto se explica porque el valor de la derivada  $\frac{dv}{dy}$  junto a la pared del tubo, en el sector inicial, es mayor que en los de la corriente estabilizada, por lo tanto, también es mayor la tensión tangencial que se determina por la ley de Newton, siendo tanto mayor, cuanto más próxima está la sección que se examina al extremo del tubo, es decir, cuanto menor es la coordenada  $x$ .

La pérdida de altura de presión en el sector del tubo de longitud  $l \leq l_{inic.}$  se determina por las fórmulas (6.5) o (6.6) y (6.7), pero con el coeficiente de corrección  $K$  mayor que la unidad. Los valores de este coeficiente pueden hallarse por medio de la gráfica (fig. 47), donde el coeficiente  $K$  está representado como función del parámetro adimensional  $\frac{x}{Re d} 10^3$ . Con el aumento de este parámetro, el coeficiente  $K$  disminuye y se hace igual a 1,09, si

$$\frac{x}{Re d} = \frac{l_{inic.}}{Re d} = 0,029,$$

es decir, si  $x = l_{inic.}$ . Por consiguiente, la resistencia de todo el sector inicial del tubo es 9% mayor que la del sector correspondiente, escogido en la parte de la corriente laminar estabilizada.



Para los tubos cortos, los valores del coeficiente de corrección  $K$ , como se ve en la gráfica, difieren mucho de la unidad.

Cuando la longitud del tubo  $l$  sea mayor que la del sector inicial  $l_{inc.}$ , la pérdida de altura de presión constará de la del sector inicial

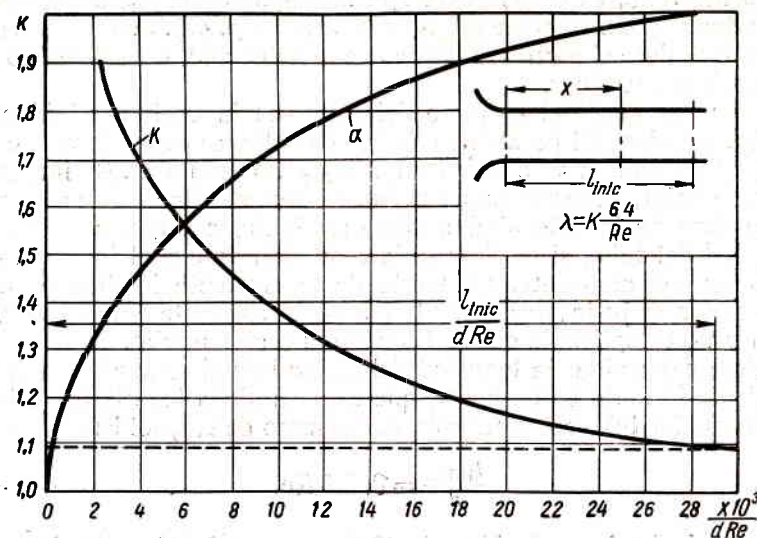


Fig. 47. Gráfica de variaciones de los coeficientes  $k$  y  $\alpha$

y de la pérdida de la parte de corriente estabilizada, o sea

$$h_{roz.} = \left[ 1,09\lambda_l \frac{l_{inc.}}{d} + \lambda_l \frac{(l - l_{inc.})}{d} \right] \frac{v^2}{2g}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (6.7) y (6.8) y efectuando las conversiones y el cálculo, obtendremos definitivamente

$$h_{roz.} = \left( 0,165 + \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \right) \frac{v}{2g} \quad (6.9)$$

Si la longitud relativa de la tubería  $\frac{l}{d}$  es bastante grande, el término complementario entre paréntesis, igual a 0,165, se puede no tomar en cuenta. Pero, si los cálculos de los tubos cuya longitud es conmensurable con  $l_{inc.}$  se verifican con mayor precisión, dicho término merece ser apreciado.

Conociendo la ley de distribución de la velocidad por la sección del tubo (6.1) y la relación entre la velocidad media y la pérdida de presión (6.4), es fácil determinar el valor del coeficiente  $\alpha$ , que toma en cuenta la distribución irregular de la velocidad en la ecuación de Bernoulli para la corriente laminar estabilizada del líquido en tubo circular.

Tomemos la expresión (4.15) y sustituyamos en ella a velocidad, según (6.1) y la velocidad media, según (6.4) y notemos también que

$$S = \pi r_0^2$$

$$dS = 2\pi r dr.$$

Después de reducir obtendremos

$$\alpha = \frac{1}{v_{med.}^3 S} \int_S v^3 dS = 16 \int_0^{r_0} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^3 \frac{r dr}{r_0^2}.$$

Efectuemos la sustitución de la variable,

$$1 - \frac{r^2}{r_0^2} = z,$$

de donde

$$\alpha = -8 \int_1^0 z^3 dz = 2 \left| z^4 \right|_0^1 = 2. \quad (6.10)$$

De modo que la verdadera energía cinética de la corriente laminar con distribución parabólica de la velocidad supera en dos veces la energía cinética del mismo flujo, pero con distribución uniforme de la velocidad.

Procediendo del mismo modo, se puede mostrar que la cantidad de movimiento por segundo de la corriente laminar con distribución parabólica es  $\beta$  veces mayor que la de la misma corriente, pero con distribución uniforme, siendo el coeficiente  $\beta$  un valor constante:

$$\beta = \frac{4}{3}.$$

Para el sector inicial del tubo con entrada redondeada el coeficiente  $\alpha$  crece de 1 a 2 (véase la fig. 47).

## § 24. Corriente laminar en el espacio libre entre dos paredes paralelas

Consideremos la corriente laminar en el espacio libre formado por dos paredes planas paralelas, que están entre sí a una distancia  $a$  (fig. 48). Pongamos el origen de las coordenadas en el centro del espacio, dirijamos el eje  $ox$  a lo largo de la corriente, y el eje  $oy$ , perpendicular a las paredes.

Tomemos dos secciones transversales normales del flujo a la distancia  $l$  una de otra y consideremos la anchura del flujo igual a la unidad. Escojamos un volumen de líquido en forma de paralelepípedo rectangular dispuesto simétricamente respecto al eje  $ox$ , entre las secciones transversales elegidas del flujo, con dimensiones de los lados  $1 \times 2y \times 1$  (véase la fig. 48). Anotemos la condición del movimiento



uniforme del volumen escogido a lo largo del eje  $ox$ :

$$2yp_{roz.} = -\mu \frac{dv}{dy} 2l,$$

donde  $p_{roz.} = p_1 - p_2$ , o sea la diferencia de presiones en las secciones que se consideran.

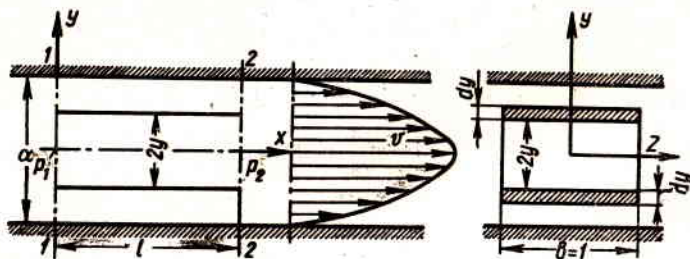


Fig. 48. Para ilustrar la teoría de la corriente laminar en el espacio libre

El signo «menos» se debe a que  $\frac{dv}{dy}$  es negativa.

De lo expuesto hallaremos el incremento de la velocidad  $dv$ , que corresponde al de la coordenada  $dy$ :

$$dv = -\frac{p_{roz.}}{\mu l} y dy.$$

Después de integrar resulta

$$v = -\frac{p_{roz.}}{2\mu l} y^2 + C.$$

Puesto que, si  $y = \frac{a}{2}$ ,  $v = 0$ , entonces  $C = \frac{p_{roz.}}{2\mu l} \cdot \frac{a^2}{4}$ , y sustituyendo el valor de  $C$ ,

$$v = \frac{p_{roz.}}{12\mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.11)$$

Ahora calculemos el gasto que corresponde a la unidad de anchura, para lo cual tomemos dos superficies elementales de dimensión  $1 \times dy$  simétricas respecto al eje  $oz$  y expresemos el gasto elemental

$$dQ = v dS = \frac{p_{roz.}}{2\mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) 2dy,$$

de donde

$$Q = \frac{p_{roz.}}{\mu l} \int_0^{\frac{a}{2}} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{p_{roz.} a^3}{12\mu l}. \quad (6.12)$$

Expresando ahora la pérdida de presión por la velocidad media  $v_{med.} = \frac{Q}{a}$  tendremos

$$p_{roz.} = \frac{12\mu l v_{med.}}{a^2}. \quad (6.13)$$

Las relaciones obtenidas pueden ser empleadas también cuando el espacio libre está formado por dos superficies cilíndricas coaxiales y el líquido fluye a lo largo de sus ejes, pero con la condición de que la magnitud  $a$  de ese espacio sea pequeña en comparación con los radios de los cilindros. En caso contrario hay que aplicar una ley más compleja, que aquí no se examina.

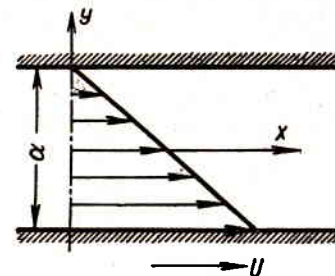


Fig. 49. Perfil de la velocidad en el espacio libre con pared en movimiento

Cuando una de las paredes que forman el espacio libre se mueve en dirección paralela a otra con velocidad  $U$  y la presión en ese espacio es constante en toda su extensión, la pared móvil arrastrará consigo el líquido y la distribución de la velocidad será lineal (fig. 49), y por consiguiente, se expresará

$$v = \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{a} \right) U. \quad (6.14)$$

El gasto del líquido, correspondiente a la unidad de anchura del espacio libre, se determinará por la velocidad media, igual a  $\frac{1}{2} U$ , o sea

$$Q = \frac{U}{2} a. \quad (6.15)$$

Si el desplazamiento de la pared expuesto más arriba tiene lugar con presión diferencial en el líquido que llena el espacio libre, la ley de distribución de la velocidad en éste se determinará como suma (o diferencia, dependiendo del sentido del movimiento de la pared) de las expresiones (6.11) y (6.14), o sea

$$v = \frac{p_{roz.}}{2\mu l} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) \pm \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{a} \right) U.$$

El modo de obtener la distribución resultante de la velocidad en el espacio libre se muestra en la fig. 50 en dos variantes:



a) cuando la dirección del movimiento de la pared coincide con la corriente del líquido bajo la acción de la presión diferencial y b) cuando la dirección del movimiento de la pared es opuesta a la corriente del líquido.

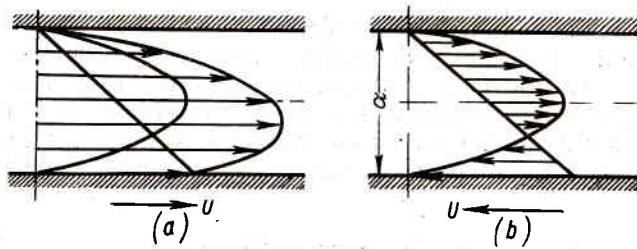


Fig. 50. Perfiles de la velocidad en el espacio libre con movimiento de la pared y gradiente de presión

En este caso, el gasto del líquido que pasó por el espacio libre se determinará como suma de los gastos, expresados por las fórmulas (6.12) y (6.15), o sea

$$Q = \frac{p_{roz.}}{2\mu l} \pm \frac{U}{2} a.$$

Tal género de movimiento del líquido en el espacio libre tiene lugar en las bombas y otros mecanismos hidráulicos.

**Ejemplo.** Para comprobar la altura del sistema del aceite del avión, hay que determinar la presión absoluta a la entrada de la bomba en mm de Hg durante el

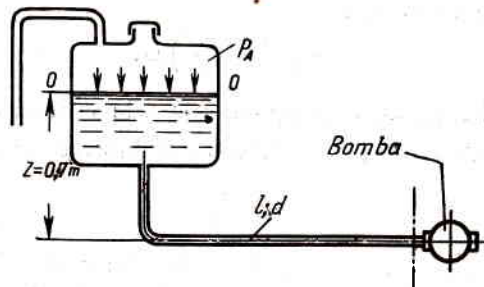


Fig. 51. Esquema de conducción de aceite

vuelo horizontal a la altura de 16.000 m ( $p_A/\gamma_{merc.} = 77,1$  mm Hg). La longitud del conducto de aceite de aspiración es  $l = 2$  m;  $d = 18$  mm; la altura del nivel del aceite en el depósito sobre la bomba,  $z = 0,7$  m; la presión en el depósito de aceite es igual a la atmosférica (fig. 51). El bombeo necesario del aceite, requerido de la condición de la conducción de calor al aceite a régimen máximo del motor es  $Q = 16$  lit/min; la viscosidad del aceite MK-8  $\nu = 0,11$  cm<sup>2</sup>/seg;  $\gamma_{ac} = 900$  kg/m<sup>3</sup>; las pérdidas de presión por resistencias locales no se toman en cuenta.

**Solución.** 1. La velocidad del aceite en la tubería es

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 10^3}{\pi \cdot 1,8^2 \cdot 60} = 105 \text{ cm/seg.}$$

2. Se calcula el número de Reynolds

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{105 \cdot 1,8}{0,11} = 1.720.$$

3. La pérdida de presión por rozamiento en la tubería de aspiración

$$h_{roz.} = \lambda_l \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{1.720} \cdot \frac{200}{1,8} \cdot \frac{105^2}{2 \cdot 981} = 23,2 \text{ cm.}$$

4. La presión a la entrada de la bomba se halla de la ecuación de Bernoulli para las secciones 0—0 y 1—1:

$$z + \frac{p_A}{\gamma_m} = \frac{p_1}{\gamma_m} + \alpha \frac{v^2}{2g} + h_{roz.},$$

de donde

$$\frac{p_1}{\gamma_m} = z + \frac{p_A}{\gamma_m} - \alpha \frac{v^2}{2g} - h_{roz.} = 70 + 7,71 \frac{13,6}{0,9} - \frac{2 \cdot 105^2}{2 \cdot 981} - 23,2 = 152 \text{ cm}$$

o sea,

$$h_{roz.} = 152 \frac{0,9}{13,6} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm. col Hg.}$$



## Corriente turbulenta

### § 25. Corriente turbulenta de un líquido en tubos lisos

En el § 19 se indicaba que para la corriente turbulenta es propia la mezcla del líquido, pulsación de la velocidad y la presión durante el paso de la corriente. Si medimos y anotamos las pulsaciones, por ejemplo, de la velocidad en función del tiempo, por medio de un aparato registrador muy sensible, obtendremos un cuadro parecido al

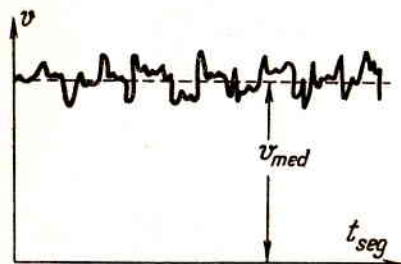


Fig. 52. Pulsación de la velocidad en el flujo turbulento

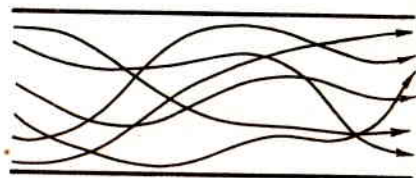


Fig. 53. Carácter de las líneas de corriente en el flujo turbulento

presentado en la fig. 52. La magnitud de la velocidad oscila irregularmente alrededor de un valor medio del tiempo, que en el caso dado queda constante.

Las trayectorias de las partículas que pasan a través de un punto fijo dado del espacio representan, en distintos momentos de tiempo, líneas curvas de diferente forma, pése a la rectitud del tubo. El carácter de las líneas de corriente en el tubo en el momento dado también es sumamente variado (fig. 53). De este modo, hablando con propiedad, la corriente turbulenta no es estable, porque las magnitudes de la velocidad y la presión, así como las trayectorias de las partículas, varían con el tiempo.

Sin embargo, se la puede considerar como estable en el caso de que la magnitud media en el tiempo de la velocidad y presión así como la magnitud del gasto total del flujo, no varíe con el tiempo. Tales casos

de corrientes del líquido tienen lugar con bastante frecuencia en la práctica.

En vista de que en el caso de corriente turbulenta no hay laminación del flujo y el líquido se mezcla, la ley de rozamiento de Newton no es aplicable. Debido a la mezcla del líquido y a la transferencia ininterrumpida de cantidades de movimiento en dirección transversal, la tensión tangencial sobre la pared del tubo en el flujo turbulento es considerablemente mayor que en el laminar, siendo los mismos valores del número  $Re$  y de la presión dinámica calculada para la velocidad media del flujo y la densidad del líquido.

La distribución de la velocidad (media en tiempo) por la sección transversal del flujo turbulento se diferencia sustancialmente de la distribución en la corriente laminar.

Si comparamos las curvas de distribución de la velocidad en un mismo tubo con un mismo gasto (igual velocidad media), pero para los regímenes laminar y turbulento, se observará una manifiesta diferencia en las curvas mencionadas (fig. 54). La distribución de la velocidad en el régimen turbulento es algo más uniforme, y el incremento

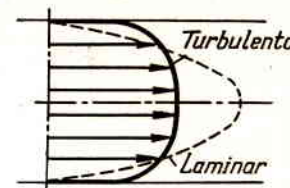


Fig. 54. Perfiles de velocidades en los regímenes laminar y turbulento



Fig. 55. Gráfica del coeficiente  $\alpha$  en función del número  $Re$

de la velocidad cerca de la pared, más brusco que en el laminar, para el cual, como ya se sabe, es propia la ley parabólica de velocidades.

Por eso, el coeficiente  $\alpha$ , que tiene en cuenta la distribución irregular de velocidades en la ecuación de Bernoulli (véase § 16), en el régimen turbulento es considerablemente menor que en el laminar. A diferencia del régimen laminar, donde  $\alpha$  no depende del número  $Re$  (véase § 23), en el caso dado el coeficiente  $\alpha$  es función del número  $Re$ , disminuyendo con el aumento del último desde 1,13, siendo  $Re = Re_{cr.}$ , hasta 1,025, siendo  $Re = 3 \cdot 10^6$ . Como se ve en el gráfico (fig. 55), la curva  $\alpha$  en función de  $Re$  se acerca asintóticamente a la unidad. En



la mayoría de los casos, para la corriente turbulenta, se puede adoptar  $\alpha = 1$ .

Las pérdidas de la energía en la corriente turbulenta de un líquido en tubos de sección invariable (es decir, las pérdidas de altura de presión por rozamiento) resultan también distintas que en el laminar. En el flujo turbulento las pérdidas de altura de presión por rozamiento son considerablemente mayores que en un flujo laminar semejante, es decir, si son idénticas las dimensiones, gasto y viscosidad.

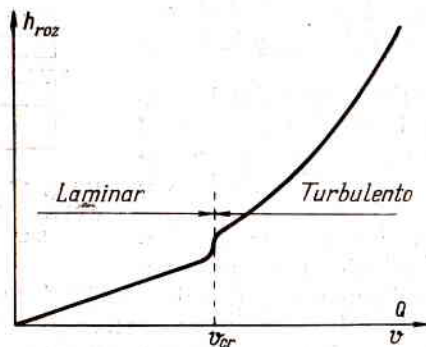


Fig. 56. Gráfica de  $h_{roz.}$ , en función de  $v$  y  $Q$

Este aumento de pérdidas es provocado por la formación de torbellinos, mezcla y curvatura de las trayectorias. Si en el régimen laminar de la corriente, la pérdida de altura de presión por rozamiento aumenta proporcionalmente con la velocidad (así como con el gasto) a la primera potencia, al pasar al régimen turbulento se observa cierto salto de la resistencia y, después, un incremento más brusco del valor  $h_{roz.}$ , según la curva próxima a la parábola de segundo grado (fig. 56).

En vista de la complejidad del régimen turbulento de la corriente y de las dificultades de su investigación analítica, hasta el presente no hay una teoría bastante rigurosa y precisa de esta corriente. Existen las así llamadas teorías semiempíricas de la turbulencia, aproximadas, de Prandtl, Karman y de otros que no vamos a examinar en el presente Manual.

En la mayoría de los casos, para los cálculos prácticos ligados con la corriente turbulenta de los líquidos en los tubos, se emplean datos sistematizados, puramente experimentales, basándose en la semejanza hidrodinámica.

La fórmula fundamental de cálculo para la corriente turbulenta en tubos circulares es la ya mencionada (4.18), que se deriva directamente de las consideraciones de semejanza y tiene la forma siguiente:

$$h_{roz.} = \lambda_t \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

o sea,

$$h_{roz.} = \lambda_t \frac{l}{d} \cdot \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4},$$

donde  $\lambda_t$  es el coeficiente de pérdidas por rozamiento en el régimen turbulento.

Esta fórmula fundamental es aplicable, tanto para el régimen turbulento, como para el laminar (véase § 22); la diferencia consiste en el valor del coeficiente  $\lambda$ .

Puesto que para la corriente turbulenta la pérdida de altura de presión por rozamiento es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad (y al cuadrado del gasto), el coeficiente de pérdidas por rozamiento en la fórmula (4.18) en la primera aproximación se puede considerar como un valor constante.

Sin embargo, de la ley de semejanza hidrodinámica (§ 20) se deduce que el coeficiente  $\lambda_t$ , lo mismo que  $\lambda_1$ , debe ser función del criterio principal de semejanza, es decir, del número de Reynolds que incluye la velocidad, diámetro y la viscosidad, es decir

$$\lambda_t = f(Re) = f\left(\frac{vd}{\nu}\right).$$

Existen varias fórmulas empíricas y semiempíricas que expresan esta función para la corriente turbulenta en tubos lisos; una de las fórmulas más cómodas y aplicables es la del científico ruso P. Konakov. Esta ecuación tiene la forma siguiente:

$$\lambda_t = \frac{1}{(1,81gRe - 1,5)^2} \quad (7.1)$$

y se usa desde  $Re = Re_{cr.}$  hasta  $Re$  igual a varios millones.

Con los números de Reynolds de  $2.300 < Re < 10^5$  se puede emplear también la antigua fórmula de Blasius

$$\lambda_t = \frac{0,3.164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (7.2)$$

De ahí se ve, que con el aumento del número  $Re$ , el coeficiente disminuye un poco, pero esta disminución es mucho menor que para el régimen laminar (fig. 57).

Esta diferencia en las leyes de variación del coeficiente  $\lambda_t$  está relacionada con el hecho de que la influencia directa de la viscosidad del líquido sobre la resistencia en el flujo turbulento es considerablemente menor que en el laminar. Si en el segundo las pérdidas de altura de presión por rozamiento son directamente proporcionales a la viscosidad (véase § 22), en el flujo turbulento, como se deduce de las fórmulas (4.18) y (7.2), dichas pérdidas son proporcionales a la viscosidad a la potencia  $1/4$ , porque el papel principal en el flujo turbulento lo juegan la mezcla y la transferencia de las cantidades de movimiento.



Las fórmulas citadas (7.1) y (7.2) para determinar el coeficiente de pérdidas por rozamiento  $\lambda_t$  por el número Re, son justas para los así llamados tubos técnicamente lisos, es decir, para aquellos cuyas rugosidades son tan pequeñas que no influyen prácticamente sobre la

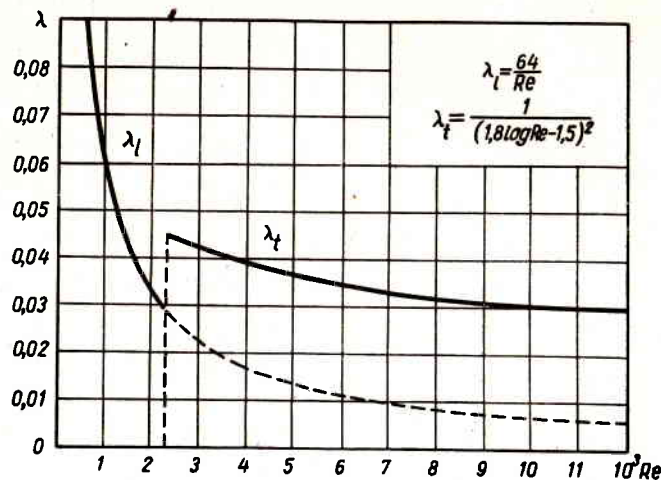


Fig. 57. Gráfica  $\lambda_{lam.}$  y  $\lambda_{turb.}$  en función del número Re

resistencia. Entre los tubos técnicamente lisos se pueden incluir, no cometiendo gran error, los tubos sin costura de metales no ferrosos (incluyendo las aleaciones de aluminio), así como los de acero sin

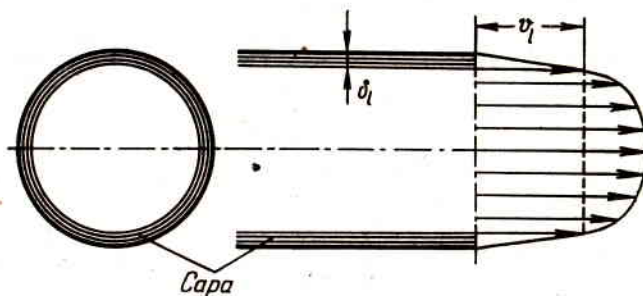


Fig. 58. Capa laminar en un tubo

costura de fabricación esmerada. De este modo, los tubos que se emplean en los aviones como conductos de combustible y para las transmisiones hidráulicas (sistemas hidráulicos), pueden ser considerados lisos y para su cálculo pueden servir las fórmulas mencionadas. Los tubos de acero y de hierro fundido para conducción de agua no pueden ser considerados lisos, porque ofrecen resistencia elevada, y las fórmulas (7.1) y (7.2) no son justas para ellos.

La cuestión de la resistencia de los tubos con rugosidades se examinará más abajo.

Como se deduce de la teoría de semejanza y como muestran los ensayos de algunos investigadores (I. Nikuradze, G. Gurzhienko y otros), en la corriente turbulenta de un líquido en los tubos, en la parte inmediata a sus paredes, habitualmente hay una capa límite (fig. 58). Es una capa de líquido muy fina, en la cual el movimiento es más retardado, por capas y sin mezcla, es decir, laminar.

En esta capa límite la velocidad aumenta bruscamente del valor cero en la pared hasta  $v_l$  en el límite de la capa. El espesor de la capa límite  $\delta_l$  es insignificante, y el número de Re, calculado por la dimensión  $\delta_l$ , velocidad,  $v_l$  y el coeficiente cinemático de viscosidad  $\nu$  es una magnitud constante, es decir

$$\frac{v_l \delta_l}{\nu} = \text{const.} \quad (7.3)$$

Esta magnitud tiene un valor universal constante, lo mismo que el número crítico Re para la corriente en los tubos. Por eso, al aumentar la velocidad del flujo y, por consiguiente, del número de Re, crece también la velocidad  $v_l$  y el espesor de la capa límite  $\delta_l$  disminuye. Siendo grande el valor de Re, la capa límite de hecho desaparece.

## § 26. Corriente turbulenta en tubos con rugosidades

Si para los tubos lisos el coeficiente de pérdidas por rozamiento se determina plenamente por el número de Re, para los que presentan rugosidades, la magnitud  $\lambda_t$  depende también de las irregularidades de su superficie interior, sin ser importante la dimensión absoluta de los salientes  $k$ , sino la relación entre esta dimensión y el radio del tubo, es decir, la rugosidad relativa  $\frac{k}{r_0}$ . La misma rugosidad absoluta puede no ejercer ninguna influencia sobre la resistencia de un tubo de gran diámetro, pero es capaz de aumentar considerablemente la de un tubo de diámetro pequeño. Además, sobre la resistencia influye el carácter de la rugosidad. El caso más sencillo es cuando todos los salientes tienen la misma dimensión  $k$  y la misma forma, es decir, el caso de rugosidad granulosa uniformemente distribuida.

De este modo, en el caso de rugosidad granulosa uniformemente distribuida el coeficiente  $\lambda_t$  dependerá tanto del número de Re, como de la relación  $\frac{k}{r_0}$ , o sea

$$\lambda_t = f\left(\text{Re}; \frac{k}{r_0}\right).$$

El carácter de la influencia de estos dos valores sobre la resistencia de los tubos se ve claramente de la gráfica obtenida experimentalmente por I. Nikuradze (fig. 59).



I. Nikuradze ensayó la resistencia de varios tubos con rugosidad artificial en su superficie interior. La rugosidad se obtuvo pegando granos de arena de dimensión determinada después de hacer pasar la arena por tamices especiales. De este modo se aseguró la rugosidad granulosa uniformemente distribuida.

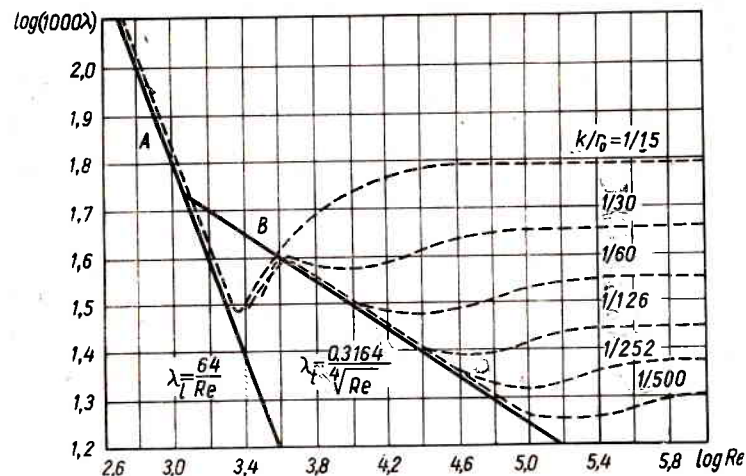


Fig. 59. Dependencia de  $\log(1.00 \lambda)$  de  $\log Re$  para tubos rugosos según los experimentos de I. Nikuradze

Los experimentos sobre los tubos han sido efectuados con amplia variedad de rugosidades relativas ( $\frac{k}{r_0} = \frac{1}{500} \div \frac{1}{15}$ ) y números de Reynolds ( $Re = 500 \div 10^6$ ). Los resultados de estos experimentos se ven en la gráfica en escala logarítmica, donde están construidas las curvas de  $\log(1000 \lambda)$  en función de  $\log Re$  para una serie de valores de  $\frac{k}{r_0}$ .

Las rectas oblicuas A y B corresponden a las leyes de la resistencia de los tubos lisos, es decir, a las fórmulas (6.7) y (7.2), las cuales, siendo multiplicadas por 1.000 y transformadas en logaritmo dan ecuaciones de líneas rectas en el sistema dado de coordenadas, a saber:

$$\log(1.000 \lambda_t) = \log 64.000 - \log Re$$

y

$$\log(1.000 \lambda_t) = \log 316,4 - \frac{1}{4} \log Re.$$

Con línea punteada se muestran las curvas para los tubos de distinta rugosidad relativa.

Analizando la gráfica se puede hacer las siguientes conclusiones principales:

1. En caso de régimen laminar la rugosidad no influye sobre la resistencia; las curvas punteadas que corresponden a diversas rugosidades coinciden de hecho con la recta A.

2. El número crítico de  $Re$  no depende prácticamente de la rugosidad. Las curvas punteadas se desvían de la recta A, siendo el valor de  $Re$  aproximadamente el mismo.

3. En la zona de la corriente turbulenta, siendo reducidos los valores de  $Re$  y  $\frac{k}{r_0}$ , la rugosidad no influye sobre la resistencia; las

líneas punteadas en varios sectores coinciden con la recta B. Sin embargo, al aumentar el número de  $Re$  esta influencia comienza a manifestarse y las curvas para los tubos con rugosidad comienzan a desviarse de la recta que corresponde a la ley de la resistencia de los tubos lisos.

4. Para altos valores del número de  $Re$  y grandes rugosidades relativas, el coeficiente  $\lambda_t$  deja de depender del número de  $Re$  y se hace constante para la rugosidad relativa dada. Esto se refiere a los sectores de las curvas punteadas donde, después de cierta elevación, éstas se hacen paralelas al eje de abscisas.

De este modo, para cada curva correspondiente a tubos con rugosidad en el régimen turbulento se pueden señalar las siguientes tres zonas de los números de  $Re$  y  $\frac{k}{r_0}$ , que se diferencian una de otra por el carácter de la variación del coeficiente  $\lambda_t$ .

Primera zona: valores reducidos de  $Re$  y  $\frac{k}{r_0}$ ; el coeficiente  $\lambda_t$  no depende de la rugosidad, sino que se determina solamente por el número de  $Re$ , lo mismo que para los tubos lisos. Esta zona no se observa a magnitudes máximas de rugosidad.

Segunda zona: el coeficiente  $\lambda_t$  depende simultáneamente de dos valores: del número de  $Re$  y de la rugosidad relativa.

Tercera zona: grandes  $Re$  y  $\frac{k}{r_0}$ ; el coeficiente  $\lambda_t$  no depende del número de  $Re$  y se determina solamente por la rugosidad relativa. Esta zona se denomina la del régimen de resistencia cuadrática, ya que la no dependencia del coeficiente  $\lambda_t$  del número de  $Re$  hace que la pérdida de presión sea exactamente proporcional al cuadrado de la velocidad [véase la fórmula (4.18)].

Para comprender mejor estas particularidades de la resistencia de tubos con rugosidad hace falta tener en cuenta la presencia de la capa límite (véase § 25).

Como se indicó más arriba, al aumentar el número de  $Re$ , el espesor de la capa límite  $\delta_l$  disminuye. Por eso, cuando se trata de flujo turbulento en un tubo con rugosidad, siendo bajos los números de  $Re$ , el espesor de la capa límite es mayor que la dimensión de los salientes y éstos se encuentran cubiertos por la capa límite y no influyen sobre la resistencia. A medida que aumenta el número de  $Re$ , el espesor  $\delta_l$  disminuye, los salientes comienzan a sobresalir de la capa y a influir



sobre el valor de la resistencia. A grandes números de  $Re$  el espesor de la capa límite se hace infinitamente pequeño y los salientes son envueltos por el flujo turbulento, formándose con torbellinos detras de cada saliente; precisamente eso explica la ley cuadrática de resistencia en esta zona.

Sin embargo, los experimentos de I. Nikuradze se efectuaron con tubos de rugosidad artificial granulosa uniformemente distribuida,

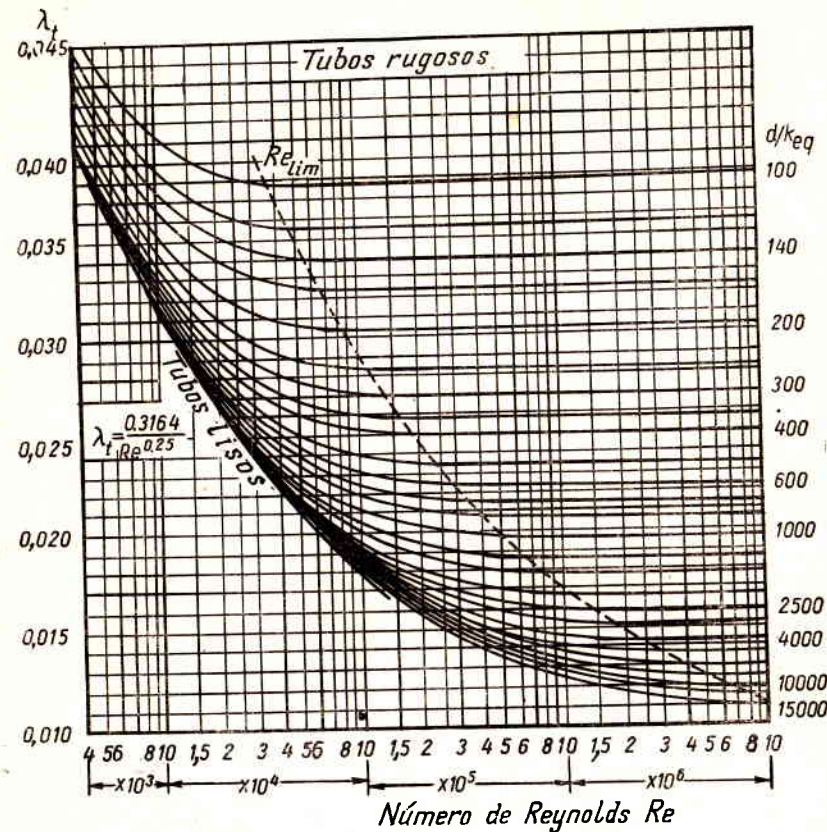


Fig. 60. Gráfica de  $\lambda_{turb}$  en función de  $Re$  para tubos rugosos

hecho difícil de encontrar en la práctica. Para los tubos con rugosidades naturales la ley de variación de  $\lambda_t$  en función de  $Re$  resulta algo diferente, sin elevarse las curvas, después de su desviación de la ley para los tubos lisos. En la fig. 60 se dan los resultados de cuidadosos experimentos, realizados por el científico soviético G. Murin.

El coeficiente  $\lambda_t$  para los tubos con rugosidades naturales se representa en la gráfica en función del número de  $Re$  para diferentes valo-

res de  $\frac{d}{k_{eq}}$ , donde  $k_{eq}$  es la rugosidad absoluta equivalente a la granulosa en los experimentos de I. Nikuradze. Para tubos nuevos de acero, G. Murin recomienda el valor de  $k_{eq} = 0,06$  mm; para tubos usados,  $k_{eq} = 0,2$  mm.

Para determinar la resistencia de los tubos con rugosidades reales en los cálculos prácticos, también se puede recomendar la siguiente nueva fórmula universal del científico soviético A. Altshul:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log \frac{Re \frac{k'}{d}}{Re \frac{k'}{d} + 7}; \quad (7.4)$$

donde  $d$  es el diámetro del tubo;

$k'$  es la dimensión proporcional a la rugosidad absoluta.

Los valores límites de  $k'$  para diferentes tubos se dan en la tabla 2.

Tabla 2

Material del tubo	$10^3 k', \text{ mm}$
Vidrio	0,0
Tubos estirados de latón, plomo y cobre	0,0
Tubos de acero sin costura de esmerada fabricación	0,6—2,0
Tubos de acero	3—10
Tubos de hierro fundido asfaltados	10—25
Tubos de hierro fundido	25—50

Para bajos valores de  $Re \frac{k'}{d}$ , en comparación con el segundo sumando del denominador de la fórmula (7.4), ésta se transforma en la fórmula de Konakov (7.1) para tubos lisos, expuesta anteriormente, y para grandes valores de  $Re \frac{k'}{d}$ , se convierte en la fórmula para tubos bastante rugosos, es decir, para el régimen de resistencia cuadrática

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log \frac{d}{k'}. \quad (7.5)$$

De este modo, comparando los valores numéricos del producto  $Re \frac{k'}{d}$  con el número 7 se pueden establecer los límites de las zonas (régimenes) indicadas anteriormente de la corriente turbulenta en los tubos con rugosidades.

## § 27. Corriente turbulenta en tubos no circulares

Antes hemos examinado la corriente turbulenta en tubos de sección circular. Pero a veces es necesario estudiar la corriente turbulenta en tubos no circulares, que se emplean, por ejemplo, en dispositivos de refrigeración.



Consideremos el cálculo de las pérdidas por rozamiento para la corriente turbulenta en un tubo con sección transversal de forma no circular.

La fuerza total de rozamiento que se ejerce sobre la superficie exterior del flujo de longitud  $l$ , se puede expresar del modo siguiente:

$$T = \text{Per.} \cdot l \tau_0,$$

donde  $P$ , es el perímetro de la sección;

$\tau_0$ , es la tensión tangencial sobre la pared, que depende principalmente de la presión dinámica, es decir, de la velocidad media de la corriente y de la densidad del líquido (véase los §§ 17 y 25).

Así, para el área de sección dada y a un gasto dado de un líquido (y por consiguiente, para la velocidad media dada), la fuerza de rozamiento es proporcional al perímetro de la sección. Por eso, para disminuir la fuerza de rozamiento, así como las pérdidas de energía por rozamiento, hay que ir reduciendo el perímetro de la sección. El perímetro mínimo del área dada lo tiene la sección circular que, por lo tanto, es la más ventajosa para obtener pérdidas mínimas de la energía (altura de presión) por rozamiento.

Para apreciar cuantitativamente la influencia de la forma de la sección sobre la pérdida de presión, se introduce en el cálculo el radio hidráulico  $R_h$  que es igual a la relación entre el área de la sección del tubo y perímetro.

$$R_h = \frac{S}{P} \quad (7.6)$$

El radio hidráulico puede ser calculado para cualquier sección. Por ejemplo, para la sección circular tenemos

$$R_h = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4},$$

de donde

$$d = 4R_h, \quad (7.7)$$

para una sección rectangular de lados  $a$  y  $b$

$$R_h = \frac{ab}{2(a+b)},$$

para el cuadrado de lado  $a$

$$R_h = \frac{a}{4}.$$

Para un espacio libre de dimensión  $a$  (considerando  $a$  muy pequeño en comparación con  $b$ ), de lo expuesto se obtiene:

$$R_h = \frac{a}{2}.$$

<sup>1)</sup> Se emplea también la noción del diámetro hidráulico igual a  $D_h = 4R_h$ .

Sustituyendo el valor del diámetro geométrico  $d$  por el radio hidráulico (7.7), en la fórmula fundamental de pérdida de altura de presión por rozamiento (4.18), tendremos

$$h_{\text{roz.}} = \lambda_t \frac{l}{4R_h} \cdot \frac{v}{2g}. \quad (7.8)$$

Puesto que la fórmula obtenida es la expresión más general de la ley de pérdidas (4.18), ésta debe ser justa no sólo para los tubos circulares, sino también para los no circulares.

Los experimentos confirman que la fórmula (7.8) es aplicable para los tubos con cualquier forma de sección transversal. El coeficiente  $\lambda$  se calcula por las mismas fórmulas (7.1) o (7.2), pero el número de Reynolds se expresa por  $R_h$ , es decir,

$$\text{Re} = \frac{4R_h v_{\text{med.}}}{\nu}. \quad (7.9)$$

**Ejemplo.** Determinese la pérdida de presión por rozamiento en la parte cilíndrica del sector de refrigeración en la cámara de combustión del motor de carburante líquido del cohete tipo «Rheintochter». El sector está hecho en forma de espacio libre anular con  $\delta = 2$  mm, longitud  $l = 500$  mm, diámetro de la circunferencia interior  $D = 155$  mm. El gasto del refrigerante (ácido nítrico) es  $G = 10$  kg/seg, peso específico  $\gamma_{\text{ác}} = 1.510$  kg/m<sup>3</sup>.

La temperatura del ácido en el sector dado se considera invariable, teniendo un valor medio  $t_{\text{med.}} = 80^\circ\text{C}$  ( $\nu = 0,25$  centistokes).

**S o l u c i ó n.** 1) Velocidad de la corriente en el espacio libre

$$v = \frac{G}{\gamma \pi D \delta} = \frac{10}{1.510 \cdot \pi \cdot 0,155 \cdot 0,002} = 6,8 \text{ m/seg.}$$

2) Radio hidráulico del sector

$$R_h = \frac{\pi [(D+2\delta)^2 - D^2]}{4\pi (D+2\delta+D)} = \frac{\delta}{2} = 1 \text{ mm.}$$

3) Número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{4R_h v}{\nu} = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 6,80}{0,0025} = 110.000.$$

4) Pérdida de presión por rozamiento

$$p_{\text{roz.}} = \lambda_t \frac{l}{4R_h} \cdot \frac{v^2}{2g} \gamma = \frac{1}{(1,8 \log \text{Re} - 1,5)^2} \cdot \frac{500}{4 \cdot 1} \cdot \frac{6,8^2}{2 \cdot 9,8} \cdot 1510 \cdot 10^{-4} = 0,8 \text{ at.}$$

Las pérdidas de presión en las partes cónicas del sector de refrigeración son considerablemente mayores, pero su cálculo es más complicado, ya que es necesario efectuar una integración.



## Resistencias hidráulicas locales

### § 28. Nociones generales sobre las resistencias locales

Anteriormente (§ 17) se indicó que las pérdidas hidráulicas de energía se dividen en dos categorías: locales y por rozamiento. Ya hemos considerado las pérdidas por rozamiento en tubos rectos de sección constante para el régimen de corriente laminar (capítulo VI) y turbulenta (capítulo VII). Examinaremos ahora las pérdidas ocasionadas por resistencias hidráulicas locales, es decir, por los elementos de tuberías, en los cuales, debido a la variación de las dimensiones o configuración del cauce, cambia la velocidad del flujo y surgen habitualmente torbellinos.

En el mismo § 17 fueron citados ejemplos de algunas resistencias locales y fue presentado el método general de su expresión, basado en los datos experimentales [(4.17)] a saber:

$$h_{loc.} = \zeta \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4}.$$

Ahora la cuestión consiste en saber determinar los coeficientes  $\zeta$  para diferentes resistencias locales.

Las resistencias hidráulicas locales más sencillas se pueden dividir en los siguientes grupos y subgrupos:

- 1) ensanchamiento del cauce: brusco y gradual;
- 2) estrechamiento del cauce: brusco y gradual;
- 3) cambio de dirección del cauce: brusco y gradual;

Los casos más complicados de resistencias locales son las uniones o combinaciones de las resistencias simples enumeradas. Así, por ejemplo, cuando la corriente del líquido pasa a través de una válvula (fig. 30, d) el flujo se tuerce, cambia su dirección, se estrecha y, por fin, se ensancha hasta las dimensiones iniciales, lo que va acompañado de formación intensa de torbellinos.

Examinemos las resistencias locales más sencillas en el orden enumerado más arriba para el régimen turbulento. Hay que señalar, que para la corriente turbulenta, los coeficientes  $\zeta$  se determinan casi exclusivamente por la geometría de las resistencias locales y cambian

muy poco al variar las dimensiones absolutas, la velocidad y la viscosidad ( $\nu$ ) del líquido, es decir, al modificarse el número Re. Por lo tanto, generalmente se les considera independientes del número Re, lo que significa que impera la ley cuadrática de resistencia. En el final del capítulo trataremos sobre las resistencias locales para el régimen laminar.

### § 29. Ensanchamiento brusco del cauce

En la mayoría de los casos, los valores de los coeficientes de las resistencias locales  $\zeta$  se obtienen experimentalmente y después se emplean las fórmulas y gráficas experimentales.

Sin embargo, para el caso de ensanchamiento brusco del cauce, en la corriente turbulenta, la pérdida de presión se llega a obtener con suficiente exactitud de un modo puramente teórico.

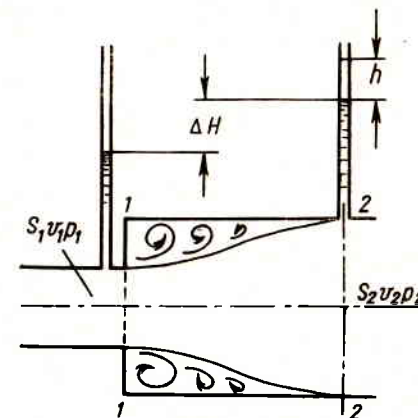


Fig. 61. Ensanchamiento brusco del cauce

El ensanchamiento brusco del cauce (tubo) y el esquema del flujo correspondiente se muestran en la fig. 61.

El flujo no se ensancha bruscamente como el cauce, sino gradualmente, y en el espacio anular, entre el flujo y la pared de la boca, se forman torbellinos, que en el caso dado constituyen la causa de las pérdidas de energía.

Se ha observado que aquí tiene lugar un cambio continuo de partículas del líquido entre el flujo principal y los remolinos.

Tomemos dos secciones del flujo: 1—1, en el plano donde se ensancha el tubo, y 2—2, donde el flujo, después de ensancharse, ha llenado toda la sección de la boca del tubo. Puesto que el flujo entre las secciones que se estudian va ensanchándose, su velocidad disminuye y la presión crece. Por eso, el segundo piezómetro indica una altura mayor en  $\Delta H$  que el primero; pero, si no hubiese pérdidas



de presión en el lugar dado, el segundo piezómetro indicaría una altura aún mayor. La altura  $h$ , que aquí no se registra, es, precisamente, la pérdida local de presión por ensanchamiento.

Designando la presión, velocidad y superficie de la sección del flujo en 1—1, por  $p_1$ ,  $v_1$  y  $S_1$  respectivamente, y en 2—2, por  $p_2$ ,  $v_2$  y  $S_2$ , apliquemos para ambas secciones la ecuación de Bernoulli, considerando uniforme la distribución de velocidades por las secciones, o sea, tomando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Tendremos

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{ens.}}$$

Después apliquemos al volumen cilíndrico comprendido entre las secciones 1—1 y 2—2 el teorema de la mecánica sobre la variación de la cantidad de movimiento. Para eso expresemos el impulso de las fuerzas exteriores que actúan sobre el volumen que se considera en la dirección del movimiento, tomando la tensión tangencial en la superficie lateral del cilindro igual a cero. Teniendo en cuenta que las superficies de las bases derecha e izquierda del cilindro son equivalentes e iguales a  $S_2$  y, considerando también que en la sección 1—1 la presión  $p_1$  actúa sobre toda la superficie  $S_2$ , obtendremos el impulso de fuerzas por segundo en la forma

$$(p_1 - p_2) S_2.$$

La variación de la cantidad de movimiento correspondiente a este impulso se halla como diferencia entre las cantidades de movimiento por segundo: el que sale del volumen que se considera y el que entra; siendo uniforme la distribución de velocidades por las secciones, esta diferencia es igual a

$$\frac{Q\gamma}{g} (v_2 - v_1).$$

Igualando ambos términos, tendremos

$$(p_1 - p_2) S_2 = \frac{Q\gamma}{g} (v_2 - v_1).$$

Dividamos la ecuación por  $S_2\gamma$ , teniendo en cuenta que  $Q = S_2v_2$  y convirtamos el miembro derecho de la ecuación:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g} (v_2 - v_1) = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{2v_1v_2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Agрупando los términos, tendremos

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)}{2g}.$$

Comparando la ecuación obtenida con la de Bernoulli anotada anteriormente, nos convencemos de su analogía completa, de lo que

concluimos que

$$h_{\text{ens.}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (8.1)$$

es decir, que la pérdida de altura de presión (energía específica) para el ensanchamiento brusco del cauce es igual a la presión dinámica calculada como diferencia de velocidades. Esta tesis se denomina a menudo teorema de Borda — Carnot en honor de estos sabios franceses, el primero, hidráulico y el segundo, matemático.

Si tomamos en consideración la ecuación del gasto

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

el resultado obtenido se puede expresar también en la forma siguiente,

$$h_{\text{ens.}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \xi \frac{v_1^2}{2g}, \quad (8.1')$$

que corresponde al método general de la expresión de las pérdidas locales.

Por consiguiente, para el caso de ensanchamiento brusco el coeficiente de resistencia es igual a

$$\xi = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \quad (8.1'')$$

El teorema demostrado se confirma fácilmente por experimentos con régimen turbulento y se emplea en los cálculos.

En el caso particular, cuando la superficie  $S_2$  es mucho mayor que la superficie  $S_1$  y, por consiguiente, la velocidad  $v_2$  se puede considerar igual a cero, la pérdida por ensanchamiento es igual a

$$h_{\text{ens.}} = \frac{v_1^2}{2g},$$

es decir, se pierde toda la presión dinámica, toda la energía cinética de la cual dispone el líquido; en este caso, el coeficiente de resistencia  $\xi = 1$ . Este caso corresponde, por ejemplo, al suministro del líquido por un tubo a un recipiente de dimensiones bastante grandes.

Conviene subrayar que la pérdida de altura de presión (de energía) considerada en caso de ensanchamiento brusco se consume, a fin de cuentas, exclusivamente en la formación de torbellinos, que surgen debido a la separación del flujo de las paredes, es decir, para mantener un movimiento continuo de las masas líquidas del remolino y su renovación (cambio) constante. Por lo tanto, estas pérdidas de energía, proporcionales al cuadrado de la velocidad (gasto), se denominan pérdidas por formación de torbellinos.

Además, estas pérdidas de energía se denominan a menudo pérdidas por choque, puesto que se verifica una disminución bastante brusca de la velocidad, como si tuviera lugar un choque de un líquido que corre con rapidez contra otro que se mueve lentamente o está inmóvil.



### § 30. Ensanchamiento gradual del tubo

El tubo que se ensancha gradualmente se denomina *difusor*. La corriente del líquido en el difusor va acompañada de la disminución de la velocidad y el aumento de la presión. Las partículas del líquido en movimiento vencen la presión creciente con su energía cinética, pero ésta va disminuyendo a lo largo del difusor, así como en dirección desde el eje hacia la pared. Las capas de líquido próximas a la pared disponen de una energía cinética tan pequeña, que a veces no

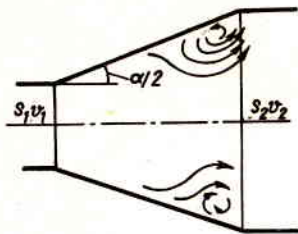


Fig. 62. Formación de torbellinos en un difusor

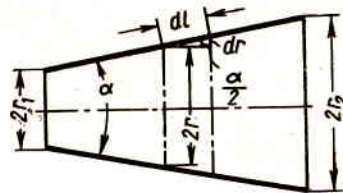


Fig. 63. Esquema de cálculo de un difusor

pueden vencer la presión elevada, y se paran e inclusive comienzan a fluir en sentido contrario. El flujo principal choca con estas contracorrientes, surgen torbellinos y el flujo se separa de la pared (fig. 62). La intensidad de estos fenómenos crece con el aumento del ángulo de ensanchamiento del difusor y, al mismo tiempo, aumentan las pérdidas por formación de torbellinos en el mismo.

Además, en el difusor hay pérdidas por rozamiento habituales, semejantes a las que surgen en tubos de sección constante.

La pérdida total de altura de presión en el difusor  $h_{dif.}$  se considera convencionalmente como suma de dos sumandos:

$$h_{dif.} = h_{roz.} + h_{ens.}; \quad (8.2)$$

donde  $h_{roz.}$  es la pérdida de altura de presión por rozamiento;  $h_{ens.}$  es la pérdida de altura de presión por ensanchamiento (formación de torbellinos).

La pérdida de altura de presión por rozamiento se puede calcular con aproximación del modo siguiente. Consideremos un difusor circular con una generatriz rectilínea y ángulo  $\alpha$  en el vértice. Supongamos que  $r_1$  es el radio del orificio de entrada del difusor, y  $r_2$ , el del orificio de salida (fig. 63). Puesto que a lo largo del difusor el radio de la sección y la velocidad de movimiento del líquido son magnitudes variables, hace falta tomar un segmento elemental del difusor de longitud  $dl$  a lo largo de la generatriz y expresar para éste la pérdida elemental de altura de presión por rozamiento, según la

fórmula fundamental (4.18). Tendremos

$$dh_{roz.} = \lambda_t \frac{dl}{2r} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

donde  $v$ , es el valor de la velocidad media en cualquier sección cuyo radio sea igual a  $r$ .

Del triángulo elemental se deduce que

$$dl = \frac{dr}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Después, basándose en la ecuación del gasto se puede anotar

$$v = v_1 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2,$$

donde  $v_1$  es la velocidad en la parte estrecha del difusor.

Sustituyamos estas identidades en la fórmula para  $dh_{roz.}$  y ejecutemos la integración entre los límites de  $r_1$  y  $r_2$ , es decir, a lo largo de todo el difusor, considerando constante el coeficiente

$$dh_{roz.} = \lambda_t \frac{dr}{2r \sin \frac{\alpha}{2}} \left( \frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{v_1^2}{2g},$$

de donde

$$h_{roz.} = \frac{\lambda_t}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{v_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda_t}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right] \frac{v_1^2}{2g},$$

o definitivamente

$$h_{roz.} = \frac{\lambda_t}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{v_1^2}{2g}, \quad (8.3)$$

donde  $n = \frac{S_2}{S_1} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2$  es el así llamado grado de ensanchamiento del difusor.

El segundo sumando, la pérdida de altura de presión por ensanchamiento (formación de torbellinos), tiene en el difusor la misma naturaleza que para el ensanchamiento brusco, pero de menor magnitud, por eso se expresa generalmente por la misma fórmula (8.1) o (8.1'), pero con el coeficiente de corrección  $k$  menor que la unidad, o sea:

$$h_{ens.} = k \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = k \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = k \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}. \quad (8.4)$$

Puesto que en el difusor se observa un choque más atenuado que en un ensanchamiento brusco, el coeficiente  $k$  se denomina a menudo coeficiente de atenuación del choque. El valor numérico de dicho coeficiente para los difusores con ángulos de conicidad  $\alpha$  de 5° a 20° se puede determinar por la siguiente fórmula experimental del cien-



tífico soviético I. Idelchik:

$$k = 3,2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt[4]{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (8.5)$$

o por la fórmula aproximada de Fligner:

$$k = \operatorname{sen} \alpha. \quad (8.6)$$

Tomando en cuenta las fórmulas obtenidas (8.3) y (8.4), la expresión (8.2) se puede expresar en la forma siguiente:

$$h_{\text{dif.}} = \left[ \frac{\lambda_t}{8 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{\text{dif.}} \frac{v_1^2}{2g}, \quad (8.7)$$

y el coeficiente de resistencia del difusor se expresará definitivamente con la siguiente fórmula:

$$\zeta_{\text{dif.}} = \frac{\lambda_t}{8 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + k \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2. \quad (8.8)$$

De aquí se ve que el coeficiente  $\zeta_{\text{dif.}}$  depende del ángulo  $\alpha$ , del coeficiente  $\lambda_t$  y del grado de ensanchamiento  $n$ .

Es importante aclarar el carácter de dependencia de  $\zeta_{\text{dif.}}$  del ángulo  $\alpha$ . Con el aumento del ángulo  $\alpha$ , siendo invariables  $\lambda_t$  y  $n$ , el

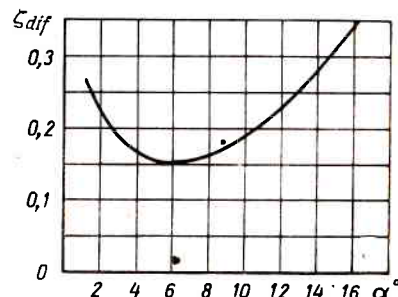


Fig. 64. Gráfica de  $\zeta_{\text{dif.}}$  del difusor en función del ángulo  $\alpha$

primer sumando en la fórmula (8.8) condicionado por el rozamiento, disminuye, ya que el difusor se hace más corto y el segundo sumando, condicionado por la formación de torbellinos y separación del flujo, aumenta.

Al disminuir el ángulo  $\alpha$ , la formación de torbellinos disminuye, pero aumenta el rozamiento, ya que con el grado de ensanchamiento dado  $n$  el difusor se alarga y su superficie de rozamiento aumenta.

La función  $\zeta_{\text{dif.}} = f(\alpha)$  tiene un mínimo para cierto valor óptimo del ángulo  $\alpha$  (fig. 64).

El valor de este ángulo se puede hallar aproximadamente de la fórmula (8.8), sustituyendo  $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  por  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha$  del modo siguiente: diferenciar la expresión (8.8), teniendo en cuenta (8.6) por  $\alpha$ , igualar a cero y resolverla respecto a  $\alpha$ , o sea

$$\frac{d\zeta_{\text{dif.}}}{d\alpha} = -\frac{\lambda_t}{4} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 = 0.$$

De donde hallamos

$$\alpha_{\text{ópt.}} = \arcsen \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{\lambda_t}{4}}.$$

Si usamos en esta fórmula valores del coeficiente de pérdidas por rozamiento  $\lambda_t = 0,015-0,025$  y relaciones de áreas en los límites

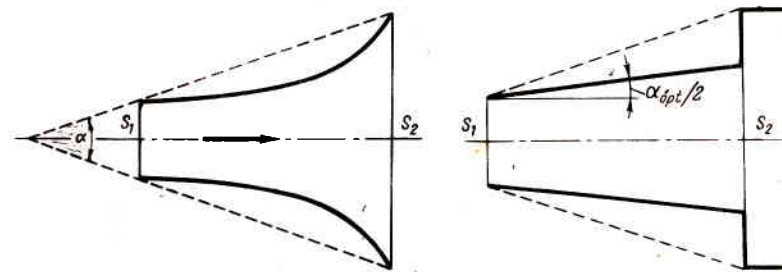


Fig. 65. Difusor con gradiente constante de presión

Fig. 66. Difusor escalonado

$n = 2-4$ , obtendremos como promedio el ángulo óptimo del difusor igual a  $6^\circ$ , lo que corresponde a los datos experimentales.

En la práctica, con el fin de reducir la longitud del difusor de  $n$  dado, se adoptan generalmente ángulos  $\alpha$  un poco mayores, a saber:  $\alpha = 7 \div 9$  grados. Los mismos valores del ángulo  $\alpha$  se pueden recomendar también para los difusores cuadrados.

Para los difusores rectangulares con ensanchamiento en un plano (difusores planos), el ángulo óptimo es mayor que para los circulares y cuadrados y es de  $10^\circ$  a  $12^\circ$ .

Si las dimensiones hacen imposible emplear los ángulos  $\alpha$  próximos a los óptimos, siendo  $\alpha > 15 \div 25$  grados, conviene renunciar al difusor con generatriz rectilínea y utilizar uno de los especiales, por ejemplo, el que asegura un gradiente constante de presión a lo largo del eje ( $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$ ). El diseño aproximado de tal difusor se da en la fig. 65.

La disminución de la pérdida de energía en estos difusores, en comparación con los rectilíneos, será tanto mayor, cuanto mayor es el ángulo  $\alpha$  y alcanza hasta un 40%, siendo  $\alpha =$  de  $40^\circ$  a  $60^\circ$ . Además, el flujo en el difusor curvilíneo se caracteriza por su mayor estabilidad.



También ofrece buenos resultados el difusor escalonado compuesto de un difusor corriente con ángulo óptimo y a continuación un ensanchamiento brusco (fig. 66). El ensanchamiento brusco no provoca grandes pérdidas de energía, porque las velocidades en este lugar son relativamente pequeñas. La resistencia total de este difusor es considerablemente menor que la de uno normal de la misma longitud y con el mismo ensanchamiento.

### § 31. Contracción del tubo

La **contracción brusca** (fig. 67) siempre provoca una pérdida de energía menor que el ensanchamiento brusco, estando las superficies en la misma proporción. En este caso, la pérdida está condicionada, primero, por el rozamiento del flujo al entrar en el tubo estrecho y, segundo, por las pérdidas debidas a la formación de torbellinos.

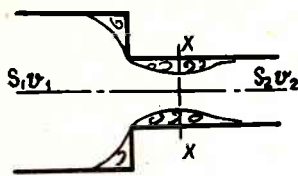


Fig. 67. Estrechamiento brusco del tubo

Estos se forman, porque el flujo no se desliza por el ángulo de entrada, sino que se separa de éste y el flujo se estrecha, mientras que el espacio anular alrededor de la parte estrechada del flujo se rellena de líquido arremolinado.

En el ensanchamiento ulterior del flujo tiene lugar la pérdida de altura de presión, que se determina por el teorema de ensanchamiento brusco del tubo. Por consiguiente, la pérdida total de altura de presión es igual a

$$h_{\text{estr.}} = \zeta_0 \frac{v_x^2}{2g} + \frac{(v_x - v_2)^2}{2g} = \zeta_{\text{estr.}} \frac{v_2^2}{2g}, \quad (8.9)$$

donde  $\zeta_0$  es el coeficiente de resistencia, condicionado por el rozamiento del flujo al entrar en el tubo contraído;

$v_x$  es la velocidad en el lugar de contracción.

El coeficiente de resistencia de contracción brusca depende del grado de contracción, es decir, de  $n = \frac{S_1}{S_2}$  y puede ser determinado por la siguiente fórmula semiempírica propuesta por I. Idelchik.

$$\zeta_{\text{estr.}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right). \quad (8.10)$$

De esta fórmula se deduce, que en el caso particular, cuando se considere  $\frac{S_2}{S_1} = 0$ , es decir, si el tubo sale de un recipiente de dimensiones bastante grandes y no hay redondeamiento del ángulo de entrada, el coeficiente de resistencia es igual a

$$\zeta_{\text{estr.}} = \zeta_{\text{entr.}} = 0,5.$$

Con el redondeamiento del ángulo de entrada (arista de entrada) se puede disminuir considerablemente la presión en la entrada del tubo.

La **contracción gradual** del tubo, es decir, un tubo cónico convergente, se denomina confusor (fig. 68). El paso del líquido por el confusor va acompañado de aumento de la velocidad y caída

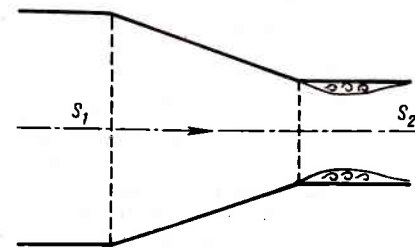


Fig. 68. Confusor

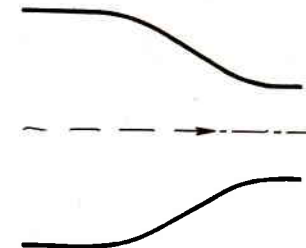


Fig. 69. Tobera

de la presión. El líquido fluye de la presión mayor a la menor, por eso, no surgen condiciones para la formación de torbellinos e interrupción del flujo (como se observa en el difusor). En la tobera hay solamente pérdidas por rozamiento. Por eso, la resistencia de la tobera es siempre menor que la de un difusor semejante.

La pérdida de altura de presión por rozamiento en la tobera se calcula del mismo modo que hemos hecho para el difusor, es decir, primero se expresa la pérdida para un segmento elemental y después se efectúa la integración. De este modo se obtiene la siguiente fórmula

$$h_{\text{roz.}} = \frac{\lambda_t}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{v_2^2}{2g}, \quad (8.11)$$

donde  $n$  es el grado de contracción.

Los pequeños torbellinos y la separación del flujo de la pared con la contracción simultánea del mismo surgen solamente a la salida de la tobera, en el lugar de la unión del tubo cónico con el cilíndrico. Para liquidar estos torbellinos y las pérdidas que provocan, se recomienda que la unión de la parte cónica con la cilíndrica no sea brusca, o que la parte cónica sea sustituida por una curvilínea que pase gradualmente a la cilíndrica (fig. 69). De este modo, se puede obtener un grado considerable de contracción con pequeñas dimensiones a lo largo del eje y con pérdidas insignificantes.

El coeficiente de resistencia de semejante contracción gradual (tobera) varía aproximadamente entre los límites de  $\zeta = 0,03 - 0,10$ , dependiendo del grado y la moderación de estrechamiento, y del número de Re (a valores mayores del número Re corresponden valores menores de  $\zeta$  y viceversa).



### § 32. Codo del tubo

El codo en escuadra (fig. 70), provoca habitualmente pérdidas considerables de energía, ya que en éste surgen la separación del flujo y torbellinos, siendo estas pérdidas tanto mayores, cuanto mayor es el ángulo  $\delta$ . El coeficiente de resistencia del codo de sección circular  $\zeta_{\text{codo}}$  crece en flecha al aumentar  $\delta$  (fig. 71) y siendo  $\delta = 90^\circ$  alcanza el valor de 1,0.

En vista de que en los

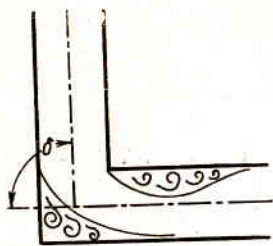


Fig. 70. Codo

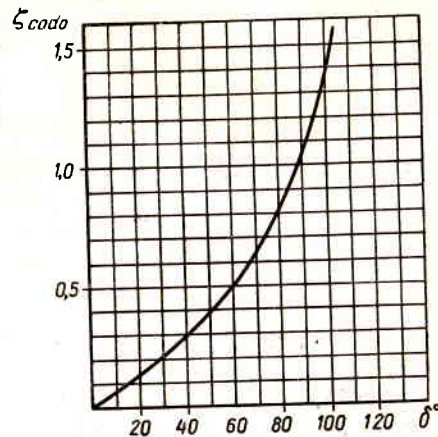


Fig. 71. Gráfica de  $\zeta_{\text{codo}}$  en función del ángulo  $\delta$

codos sin curva alargada las pérdidas de presión son muy grandes su empleo en las cañerías no se recomienda.

El tubo con curvatura suave, o codo de curva alargada (fig. 72) se denomina también codo suave. La curvatura suave

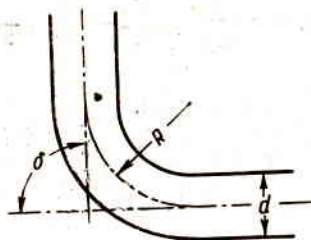


Fig. 72. Codo suave

disminuye considerablemente las dimensiones de los torbellinos y, por consiguiente, de la resistencia del codo suave en comparación con la del codo en escuadra. Esta disminución será tanto mayor cuanto mayor sea el radio relativo de curvatura del codo suave  $\frac{R}{d}$ , y siendo su valor bastante considerable, la formación de torbellinos cesa completamente. El coeficiente de resistencia del codo suave

depende de la proporción  $\frac{R}{d}$ , del ángulo  $\delta$ , así como de la forma de la sección transversal del tubo.

A los codos suaves de sección circular con ángulo  $\delta = 90^\circ$  y  $\frac{R}{d} \gg 1$  se puede aplicar la siguiente fórmula experimental:

$$\zeta_{\text{der.}} = 0,051 + 0,19 \frac{d}{R} \quad (8.12)$$

Para los ángulos  $\delta \leq 70^\circ$ , el coeficiente de resistencia es igual a

$$\zeta_{\text{der.}} = 0,9 \sin \delta \cdot \zeta'_{\text{der.}} \quad (8.13)$$

y siendo  $\delta \geq 100^\circ$

$$\zeta_{\text{der.}} = \left( 0,7 + \frac{\delta}{90} \cdot 0,35 \right) \zeta'_{\text{der.}} \quad (8.14)$$

Hay que tener en cuenta, que la pérdida de presión determinada por los coeficientes citados  $\zeta_{\text{der.}}$ , o sea

$$h = \zeta_{\text{der.}} \frac{v^2}{2g},$$

es la diferencia entre la pérdida total de presión en el codo suave y la pérdida por rozamiento en un tubo recto de longitud igual a la del codo suave, es decir, el coeficiente  $\zeta_{\text{der.}}$  aprecia sólo la resistencia complementaria condicionada por la curvatura del cauce. Poreso, al calcular la tubería que contiene codos suaves, es necesario incluir sus dimensiones en la longitud total de la tubería, para la cual se calcula la pérdida por rozamiento, y después a ésta se suma la pérdida complementaria por curvatura que se determina por el coeficiente  $\zeta_{\text{der.}}$ .

Las fórmulas mencionadas (8.12), (8.13) y (8.14) se han obtenido basándose en las gráficas del científico soviético, profesor G. Abramóvich, que ha estudiado una serie de datos experimentales fidedignos sobre la resistencia de las derivaciones y propuesto la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia del codo suave.

$$\zeta_{\text{der.}} = 0,73 abc, \quad (8.15)$$

donde  $a$  es la función del radio relativo de curvatura, según la gráfica  $a = f_1 \left( \frac{R}{d} \right)$  (fig. 73);

$b$  es la función del ángulo del codo según la gráfica  $b = f_2(\delta)$  (fig. 74) e igual a la unidad, si  $\delta = 90^\circ$ ;

$c$  es la función de la forma de la sección transversal del tubo, igual a la unidad para las secciones circular y cuadrada, y para las secciones rectangulares con los lados  $e$  y  $d$  (el lado  $e$  es paralelo al eje de curvatura), según la gráfica  $c = f_3 \left( \frac{l}{d} \right)$  (fig. 75).



De la última gráfica se ve, que la función  $c$  tiene un mínimo, si la proporción de los lados del rectángulo  $\frac{e}{d} = 2,5$ . Esto se explica porque en el lugar de la curvatura del flujo surge el así llamado «par de torbellinos», debido a que, durante el movimiento del líquido por

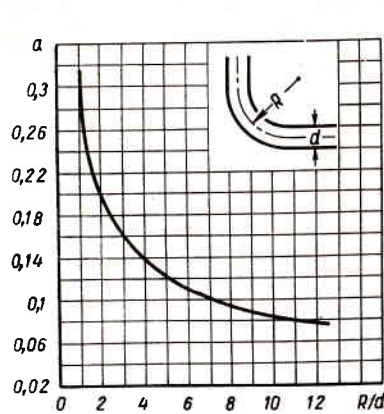


Fig. 73. Gráfica de  $a$  en función de  $\frac{R}{d}$

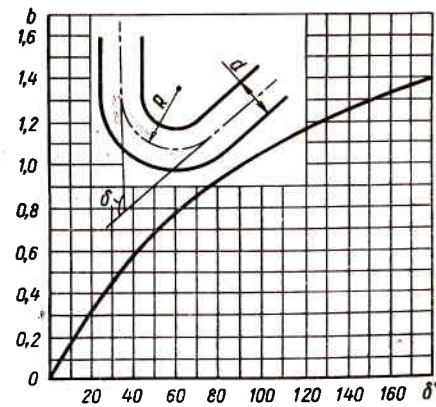


Fig. 74. Gráfica de  $b$  en función de  $\delta$

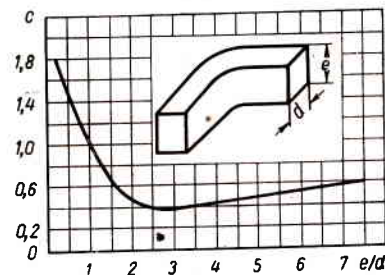


Fig. 75. Gráfica de  $c$  en función de  $\frac{e}{d}$

un cauce curvo, sobre todas las partículas actúan fuerzas centrífugas. Pero, puesto que la distribución de la velocidad por la sección no es uniforme (en el centro, las velocidades son mayores, y junto a las paredes, menores), la fuerza centrífuga, proporcional al cuadrado de la velocidad, será considerablemente mayor en la parte central del flujo que junto a las paredes. Por lo tanto, (fig. 76) surgen momentos de fuerzas centrífugas respecto a los ejes  $O_1$  y  $O_2$ , que forman remolinos en el líquido. En el centro del flujo, el líquido se desplaza de la pared interna a la externa, es decir, a lo largo del radio de curva-

tura, y junto a las paredes laterales, en sentido contrario. Así se forma el par de torbellinos. Como resultado de la adición del movimiento circular del líquido al de avance, en el lugar de la curvatura del tubo, el flujo se divide en dos corrientes helicoidales.

Para la formación del «par de torbellinos» se gasta continuamente la energía del líquido, es decir, se pierde presión y esta pérdida es proporcional al momento de inercia del área de la sección transversal

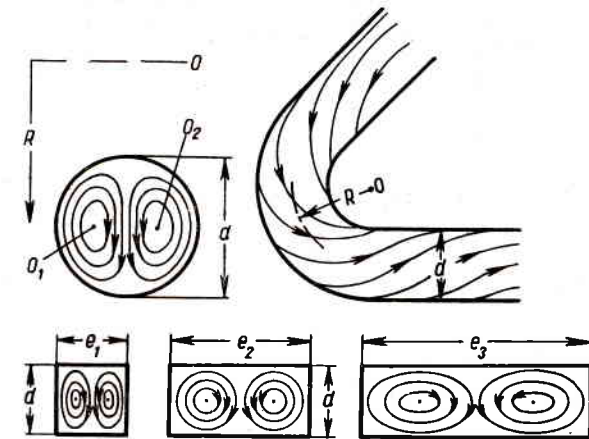


Fig. 76. Esquema de la corriente en un codo suave

del torbellino. La sección circular del torbellino tiene un momento de inercia mínimo, y puede surgir siendo la proporción de los lados del rectángulo  $\frac{l}{d} \approx 2$ . Por eso, la resistencia mínima del codo se obtiene con una proporción de los lados del rectángulo igual a dos o algo más. En este caso, la forma de la sección transversal de cada torbellino es natural, es decir, circular; en los demás casos los torbellinos se comprimirán en una u otra dirección.

De tal modo, si desde el punto de vista de la disminución de pérdidas por rozamiento, la forma óptima de la sección transversal del tubo es circular, para obtener el valor mínimo de  $\zeta_{\text{der.}}$ , la sección óptima será rectangular con la proporción de los lados 2,5 (el lado mayor paralelo al eje de curvatura del codo suave). El coeficiente de resistencia del codo suave con tal forma de sección es igual a

$$\zeta = 0,4 \zeta_{\text{der.}}$$

donde  $\zeta_{\text{der.}}$  es el coeficiente de resistencia del codo suave circular con idénticos  $\frac{R}{d}$  y  $\delta$ .

De esta manera, utilizando la forma óptima de sección del cauce en el codo, se puede disminuir la pérdida por curvatura en 2,5 veces en comparación con la sección circular. En algunos casos especiales,



cuando es sumamente importante tener pérdidas mínimas, conviene emplear la indicada forma especial de sección, lo que se practica, por ejemplo, en los canales de aire de ciertos motores de aviación.

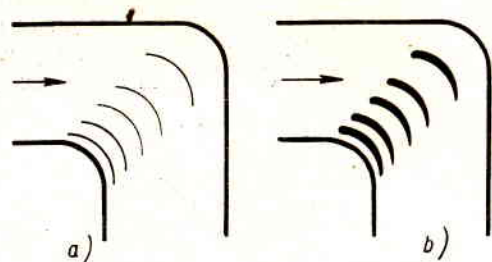


Fig. 77. Codos de paletas

Además, para disminuir la resistencia de un codo de grandes dimensiones (por ejemplo, en los túneles aerodinámicos) en éste se instalan a veces paletas guías. Si se usan paletas no perfiladas, encorvadas según el arco de la circunferencia (fig. 77, a), el coeficiente de resistencia del codo disminuye hasta  $\zeta = 0,4$ ; si se usan paletas perfiladas (fig. 77, b), la disminución de  $\zeta$  es aún mayor, hasta  $\zeta = 0,25$ .

### § 33. Resistencias locales para el régimen laminar

Todo lo expuesto en los párrafos anteriores del capítulo presente se refería a las resistencias hidráulicas locales para el régimen turbulento. En cuanto al régimen laminar, en primer lugar, las resistencias locales juegan habitualmente un papel insignificante en comparación con el rozamiento y, en segundo lugar, la ley de resistencia es para dicho caso más complicada y está investigada en menor grado que para el régimen turbulento.

Si para el régimen turbulento las pérdidas locales de altura de presión se pueden considerar proporcionales al cuadrado de la velocidad (gasto), y los coeficientes de resistencia  $\zeta$  se determinan principalmente por la forma de la resistencia y prácticamente no dependen del número de Re, para el régimen laminar la pérdida de altura de presión  $h_{loc.}$  conviene considerarla como la suma

$$Hh_{loc.} = h_{roz.} + H_{torb.}, \quad (8.16)$$

donde  $h_{roz.}$  es la pérdida de presión condicionada por la acción directa de las fuerzas de rozamiento (viscosidad), en la resistencia local dada, y proporcional a la viscosidad del líquido y a la velocidad a la primera potencia;

$h_{torb.}$  es la pérdida ligada con la separación del flujo y formación de torbellinos que surgen en la misma resistencia local o tras ésta y que es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Así, por ejemplo, al pasar la corriente a través del pulverizador (fig. 78), a la izquierda de la sección 1—1 surge la pérdida de altura de presión por rozamiento, y a la derecha, la pérdida por formación de torbellinos.

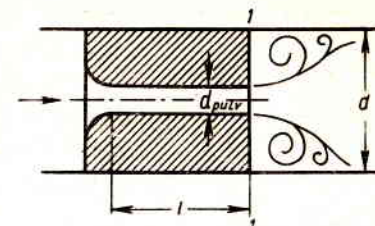


Fig. 78. Esquema de un pulverizador

Teniendo en cuenta la ley de resistencia para el régimen laminar (6.6) y (6.7) con la corrección para el sector inicial, y también la fórmula (4.7), se puede expresar la misma suma del modo siguiente:

$$h_{loc.} = \frac{A}{Re} + \frac{v^2}{2g} + B \frac{v}{2g}, \quad (8.16')$$

Donde A y B son constantes adimensionales que dependen de la forma de la resistencia local.

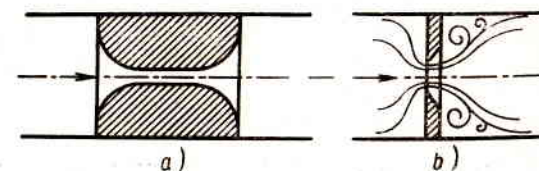


Fig. 79. Dos tipos de resistencias locales

Después de dividir la ecuación (8.16) por la velocidad de la presión dinámica, obtendremos la expresión general para el coeficiente de la resistencia local para el régimen laminar,

$$\zeta_{loc.} = \frac{A}{Re} + B. \quad (8.17)$$

La relación entre el primer y segundo miembro en las fórmulas (8.16) y (8.17) depende de la forma de la resistencia local y del número de Reynolds.

En las resistencias locales donde hay un canal estrecho de longitud que supera considerablemente a su diámetro y con contornos suaves de entrada y salida, como por ejemplo, se muestra en la fig. 79, a, y los números de Re son reducidos, la pérdida de altura de presión se determina principalmente por el rozamiento y la ley de resistencia es próxima a la lineal. El segundo miembro en las fórmulas (8.16)



y (8.17) es igual, en este caso, a cero o es muy pequeño en comparación con el primero.

Si en la resistencia local, el rozamiento está reducido al mínimo, por ejemplo, gracias a la existencia de una arista viva (como en la fig. 79, b) y hay separación del flujo y torbellinos, mientras que los

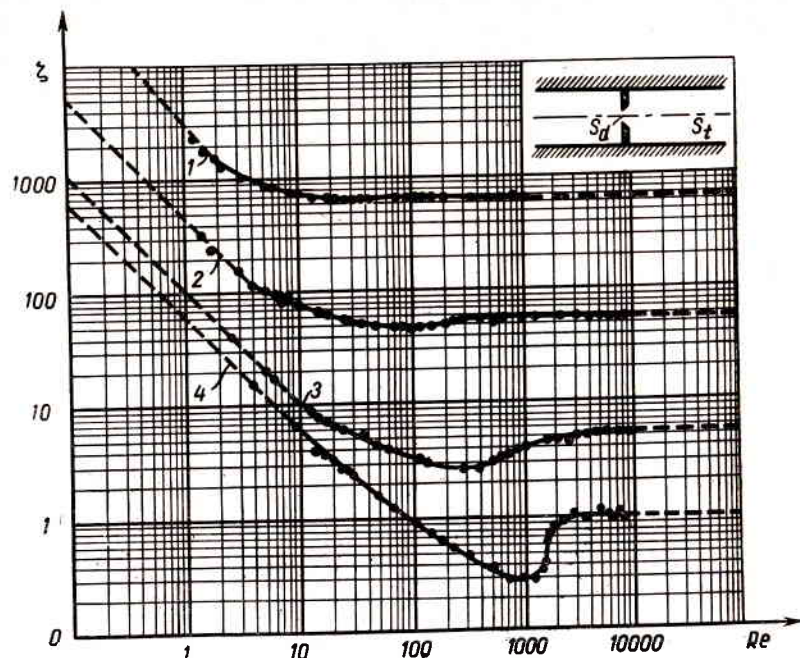


Fig. 80. Gráfica de  $\zeta$  para contadores de orificio en función de  $Re$

- 1) —  $\frac{S_{\text{diaf.}}}{S_{\text{tubo}}} = 0,05$ ;    2) —  $\frac{S_{\text{diaf.}}}{S_{\text{tubo}}} = 0,16$ ;  
3) —  $\frac{S_{\text{diaf.}}}{S_{\text{tubo}}} = 0,43$ ;    4) —  $\frac{S_{\text{diaf.}}}{S_{\text{tubo}}} = 0,64$ .

números de  $Re$  son bastante elevados, las pérdidas de presión son proporcionales a la velocidad (y al gasto) aproximadamente a la segunda potencia.

Si el número de  $Re$  varía en gran escala, en una misma resistencia local son posibles, tanto la ley lineal de resistencia (con  $Re$  reducidos), como la cuadrática (con  $Re$  grandes), así como una zona de resistencia de transición para números de  $Re$  intermedios. La gráfica característica de  $\zeta$ , en función de  $Re$ , en coordenadas logarítmicas para una amplia variedad de  $Re$  está representada en la fig. 80, donde se muestran los resultados de ensayos sobre cuatro contadores de orificio. Las rectas oblicuas corresponden a la ley lineal de resistencia (el coeficiente  $\zeta$  es inversamente proporcional a  $Re$ ), los sectores curvi-

líneos corresponden a la zona de transición, y las rectas horizontales, a la ley cuadrática (el coeficiente  $\zeta$  no depende de  $Re$ ). Las gráficas de este género para resistencias locales concretas se construyen generalmente basándose en datos experimentales.

A veces, en lugar de la forma binómica de expresión de las pérdidas hidráulicas locales, se emplea un monomio con exponente de tipo

$$h_{\text{loc.}} = kQ^m,$$

donde  $k$  es una magnitud dimensional;

$m$  es el exponente que depende de la forma de la resistencia local y del número de Reynolds y que varía de 1 a 2.

Para las resistencias locales y números de  $Re$  con los cuales la ley de resistencia es próxima a la lineal, se emplea a menudo la expresión de las pérdidas hidráulicas locales por longitudes equivalentes de tubería, es decir, a la longitud real de la tubería se le suma la longitud equivalente por su resistencia a las resistencias locales. De tal modo, tenemos

$$l_{\text{calc.}} = l_{\text{real}} + l_{\text{eq.}} \quad (8.18)$$

y

$$\Sigma h = \frac{64}{Re} \frac{l_{\text{calc.}}}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{128 v l_{\text{calc.}} Q}{\pi g d^4}. \quad (8.19)$$

Los valores numéricos de longitudes equivalentes (referidos al diámetro de la tubería) para distintas resistencias locales se obtienen, como regla, experimentalmente.

El teorema de la pérdida de altura de presión para el ensanchamiento brusco del cauce demostrado en el § 29 para el caso del régimen turbulento no es justo para el laminar. Ya que, en este caso, no son aplicables las admisiones que se permitían al demostrar el teorema, es decir, las admisiones sobre la distribución uniforme de la velocidad en las secciones 1 — 1, 2 — 2, presión constante en toda la superficie  $S_2$  de la sección 1 — 1 y tensiones tangenciales iguales a cero.

Como muestran las últimas investigaciones experimentales, el coeficiente de resistencia de ensanchamiento brusco, siendo los números de  $Re$  muy pequeños ( $Re < 9$ ), depende poco de la relación de las áreas y se determina principalmente por el número de  $Re$ , según la fórmula

$$\zeta = \frac{A}{Re}.$$

Esto significa que la corriente no tiene separación y la pérdida por ensanchamiento es proporcional a la velocidad a la primera potencia. Si  $9 < Re < 3.500$ , el coeficiente de resistencia depende tanto del número de Reynolds como de la relación de las áreas. Si  $Re > 3.500$ , se puede considerar justo el teorema de Borda — Carnot, es decir, la fórmula (8.1).

Cuando el tubo conduce el líquido con velocidad  $v_1$  a un recipiente de grandes dimensiones ( $v_2 = 0$ ), se pierde toda la energía cinética



específica del líquido, la cual, para la corriente laminar estable en un tubo circular, es igual a

$$h = \alpha_l \frac{v_l^2}{2g} = \frac{v_l^2}{g}.$$

Si la corriente no es estable, es decir, si la longitud del tubo  $l < l_{inc.}$ , el coeficiente  $\alpha$  es necesario tomarlo de la gráfica (véase la fig. 47).

**Ejemplo.** Hállese el coeficiente de resistencia del pulverizador de diámetro  $d_{eyec} = 1$  mm y de longitud  $l = 5$  mm, enchufado a un tubo de diámetro  $d = 6$  mm (véase la fig. 78), en función del número Re.

**Solución.** Considerando el pulverizador como sector inicial del tubo y suponiendo que con el ensanchamiento del chorro se pierde toda la energía cinética, representaremos la pérdida de altura de presión en el pulverizador como una suma (despreciamos las pérdidas por contracción)

$$h_{eyec.} = h_{roz.} + h_{ens.} = \left( k \frac{64}{Re_{eyec.}} \cdot \frac{l}{d} + \alpha \right) \frac{v_{eyec.}^2}{2g}.$$

Pasando de la velocidad en el pulverizador  $v_{eyec.}$  a la del líquido en el tubo  $v$ , hallamos el coeficiente de resistencia del pulverizador:

$$\zeta_{eyec.} = \frac{2gh_{eyec.}}{v^2} = \left( k \frac{64}{Re_{eyec.}} \cdot \frac{l}{d} + \alpha \right) \frac{d^4}{d_{eyec.}^4}.$$

Admitiendo varios valores del número de Reynolds en el tubo (Re), hallamos el número de Reynolds en el pulverizador ( $Re_{eyec.}$ ) de la relación

$$Re_{eyec.} = \frac{v_{eyec.} d_{eyec.}}{v} = \frac{4Q}{\pi d_{eyec.} v} \cdot \frac{d}{d} = Re \frac{d}{d_{eyec.}}.$$

Después utilizamos la gráfica (fig. 47) para hallar los coeficientes  $k$  y  $\alpha$  y ejecutando las operaciones indicadas anotamos los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 3

Re	10	100	200	300	400	500
$\zeta_{eyec.}$	9500	3140	2500	2200	2030	1885

### § 34. Resistencias locales de los sistemas hidráulicos de aviones

En los sistemas hidráulicos de aviones (transmisiones hidráulicas) existen generalmente resistencias hidráulicas locales en forma de filtros, llaves, válvulas, codos y otros mecanismos y piezas de variada forma geométrica. La corriente del líquido que pasa a través de estas resistencias puede ser tanto laminar, como turbulenta, en dependencia de la velocidad y la temperatura (viscosidad) del líquido; los números de Reynolds varían entre límites bastante amplios, incluyendo  $Re_{cr.}$

Por lo tanto, los coeficientes  $\zeta$  de las resistencias mencionadas deben considerarse como funciones del número Re.

En la fig. 81 se dan en coordenadas logarítmicas las curvas de los coeficientes  $\zeta$  en función del número Re para las resistencias locales más características de los sistemas hidráulicos de aviones obtenidas experimentalmente por la ingeniera soviética N. Levkóeva. Los Re

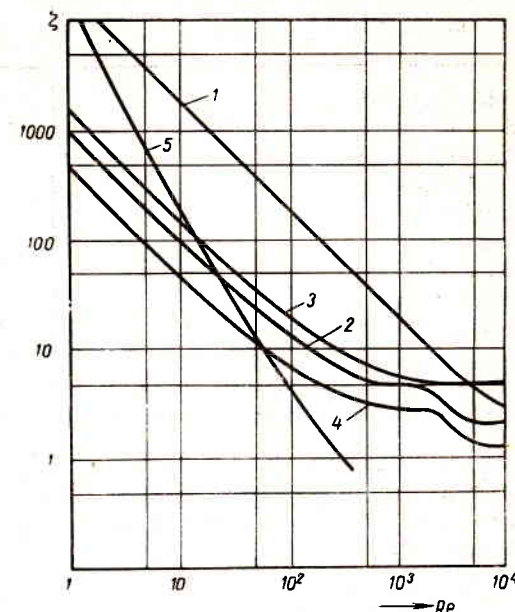


Fig. 81. Gráfica de  $\zeta$  del filtro, válvula, etc. en función del número Re: 1 — filtro de fieltro; 2 — válvula de desconexiones; 3 — válvula desarmable; 4 — triángulo 90°; 5 — válvula de retención

y los coeficientes  $\zeta$  están calculados según la velocidad en la tubería y su diámetro.

Es interesante la dependencia de  $\zeta$  de Re para un filtro de fieltro que es lineal hasta  $Re = 5.000$ . Esto ocurre porque durante el paso de la corriente laminar a través de los poros del fieltro existe rozamiento bastante considerable y no hay prácticamente torbellinos. Para la llave, válvula y codo los sectores lineales son considerablemente más cortos; después va una zona grande de transición y, por fin, la ley cuadrática de resistencia ( $\zeta = \text{const}$ ).

La inclinación más brusca de la curva para la válvula de retención, en comparación con otras resistencias, se debe a que, con el aumento de Re, debido al incremento de la velocidad del flujo, crece el grado de abertura de la válvula, es decir, cambia su característica geométrica.



En los conductos de combustible de los aviones, los números  $Re$  son por lo general bastante mayores que en los sistemas hidráulicos. Por eso se puede considerar, sin cometer gran error, que los coeficientes de resistencias locales de los conductos de combustible no dependen de  $Re$ .

Tabla 4

Nombre de la resistencia	$\xi$
Unión flexible de tubos	0,3
Codo standard 90° (cuerpo perforado)	1,2—1,3
Unión en T—derivación	3,5
Llave de combustible	1—2,5
Válvula de retención	2,0
Filtro reticular	1,5—2,5
Captador del fluidómetro:	
con impulsor giratorio	7,0
con impulsor frenado	11—12
Entrada en el tubo (salida del depósito)	0,5—1,0
Salida del tubo (entrada al depósito)	1,0

En la tabla 4 se indican los valores de los coeficientes  $\xi$  para los mecanismos y piezas más usados en los conductos de combustible. Los valores  $\xi$  se refieren a la presión dinámica en la boquilla de entrada del mecanismo (pieza).

## 9

### *Escurrecimiento o derrame del líquido a través de orificios y boquillas adicionales*

#### § 35. Orificio con arista viva en una pared delgada

En el capítulo presente vamos a examinar diferentes casos de escurrecimiento del líquido de depósitos, recipientes y calderas a través de orificios y boquillas adicionales (tubos cortos de distinta forma), a la atmósfera o, en general, a un espacio con gas o líquido semejante. La particularidad de este caso de movimiento del líquido consiste en la transformación de toda la reserva (o parte considerable) de energía potencial de que dispone el líquido en el depósito durante el escurrecimiento en energía cinética de chorro libre o de gotas, con pérdidas más o menos considerables.

En la técnica de aviación se tropieza con el escurrecimiento del líquido al estudiar el suministro de combustible a las cámaras de combustión de los turbopropulsores a gas y de motores cohete de combustible líquido. La amortiguación del avión durante el aterrizaje o al disparar el cañón se obtiene también fundamentalmente a cuenta del escurrecimiento del líquido por orificios pequeños.

Además, el paso del líquido por diferentes pulverizadores de combustión y de otros sistemas, en realidad supone el derrame por orificios y boquillas adicionales.

El problema principal que nos interesa, en el caso dado, es determinar la velocidad de escurrecimiento y el gasto de líquido para las diferentes formas de orificios y boquillas adicionales.

Tomemos un gran recipiente con líquido a presión  $p_0$ , con un orificio pequeño en la pared, a una profundidad considerable  $H_0$  de la superficie libre (fig. 82). El líquido que escurre por este orificio al espacio aéreo (gaseoso) sale a una presión  $p_1$ .

Supongamos que el orificio tiene la forma indicada en la fig. 83, *a*, es decir, que está perforado en una pared delgada, sin ninguna elaboración del borde de entrada, o la forma indicada en la fig. 83, *b*, o sea, practicado en una pared gruesa, pero con arista afilada por la parte exterior. Las condiciones de escurrecimiento del líquido en estos dos casos serán absolutamente idénticas: las partículas del líquido de todo el volumen adyacente van aproximándose al orificio, fluyendo ace-



leradamente por diversas trayectorias de poca pendiente (véase la fig. 83, a); el chorro se separa de la pared al llegar a la arista y después se contrae un poco. El chorro adquiere la forma cilíndrica a una distancia aproximadamente igual a un diámetro del orificio. La contracción del chorro del líquido está condicionada por la necesidad

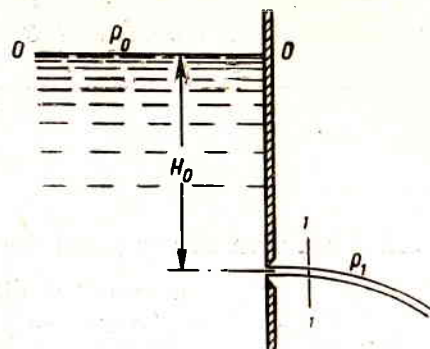


Fig. 82. Escurrecimiento de un recipiente a través de un orificio pequeño

de que pasen paulatinamente de distintas direcciones de movimiento las partículas del líquido en el depósito, incluyendo el movimiento radial por la pared, al movimiento axial en el chorro del líquido.

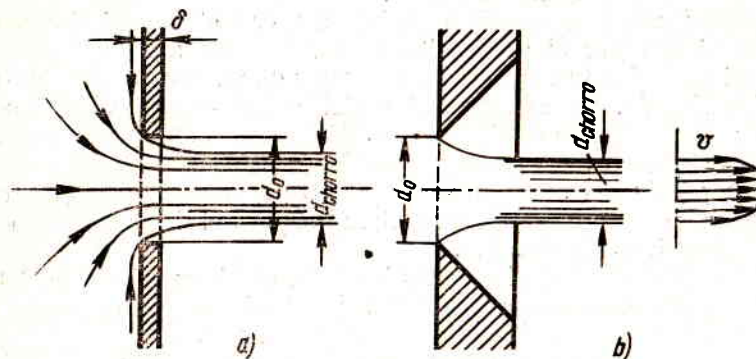


Fig. 83. Orificio redondo:  
a — en una pared delgada; b — con arista viva

Puesto que la dimensión del orificio, como se ha indicado más arriba, se supone que es pequeña en comparación con la presión  $H_0$  y con las dimensiones del recipiente y, por consiguiente, las paredes laterales y la superficie libre del líquido no influyen en el escurrecimiento del mismo al orificio, tiene lugar la así llamada *contracción completa* del chorro, o sea, la contracción máxima, a diferencia de la incompleta que se examinará a continuación.

El grado de compresión se aprecia por el coeficiente de contracción  $\epsilon$ , igual a la relación entre el área de la sección transversal del chorro y la del orificio, o sea:

$$\epsilon = \frac{S_s}{S_0} = \left( \frac{d_s}{d_0} \right)^2. \quad (9.1)$$

Apliquemos la ecuación de Bernoulli para el movimiento del líquido desde su superficie libre en el recipiente (sección 0—0 en la fig. 82), donde la presión es  $p_0$  y la velocidad se puede considerar nula, hasta una de las secciones del chorro (sección 1—1), en la parte donde éste ha adquirido ya forma cilíndrica; la presión en dicha parte, por consiguiente, resulta igual a  $p_1$ . Considerando uniforme la distribución de la velocidad en el chorro, se tiene que:

$$H_0 + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g},$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de resistencia del orificio.

Introduciendo la presión calculada  $H$ , tendremos:

$$H = \frac{v^2}{2g} (1 + \zeta),$$

donde

$$H = H_0 + \frac{p_0 - p_1}{\gamma}.$$

De donde la velocidad de escurrecimiento será:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (9.2)$$

Aquí  $\varphi$  es el llamado *coeficiente de velocidad*, igual a

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}. \quad (9.3)$$

En caso de escurrecimiento del líquido perfecto,  $\zeta = 0$ , por lo tanto,  $\varphi = 1$  y la velocidad teórica de escurrecimiento será:

$$v_t = \sqrt{2gH}. \quad (9.4)$$

De tal modo, del examen de la fórmula (9.2) se puede deducir que el coeficiente de velocidad  $\varphi$  es la relación entre la velocidad real de escurrecimiento y la teórica:

$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2gH}} = \frac{v}{v_t}. \quad (9.5)$$

La velocidad real de escurrecimiento  $v$  es siempre algo menor que la teórica debido a la resistencia; por consiguiente, el coeficiente de velocidad es siempre menor que la unidad.

Hay que tener en cuenta, que la distribución de la velocidad por la sección del chorro es uniforme solamente en la parte central de



ésta (en el núcleo del chorro); la capa exterior del líquido es frenada un poco debido al rozamiento con la pared (véase la fig. 83, b). Los experimentos demuestran, que la velocidad en el núcleo del chorro es prácticamente igual a la teórica ( $v_t = \sqrt{2gH}$ ), por tanto, el coeficiente de velocidad  $\varphi$  que acabamos de introducir conviene considerarlo como el de velocidad media. Si el escurrimiento se verifica en la atmósfera, la presión por toda la sección del chorro cilíndrico es igual a la atmosférica, lo que también se confirma por los experimentos.

Calculemos ahora el gasto de líquido como producto de la velocidad real de escurrimiento por la superficie real de sección del chorro y después apliquemos las relaciones (9.1) y (9.2); tendremos

$$Q = S_{ch} \cdot v = \varepsilon S_0 \sqrt{2gH}. \quad (9.6)$$

El producto de los coeficientes  $\varepsilon$  y  $\varphi$  se suele designar con la letra  $\mu$  y se llama *coeficiente de gasto*, o sea

$$\mu = \varepsilon \varphi.$$

Entonces la fórmula (9.6) tendrá la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \mu S_0 \sqrt{2gH} \\ \text{o bien} \quad Q &= \mu S_0 \sqrt{2g \frac{p}{\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (9.6')$$

donde  $p$  es la presión calculada bajo la cual tiene lugar el escurrimiento.

La expresión (9.6') obtenida es la principal para el capítulo presente, ya que ella resuelve el problema fundamental, es decir, determina el gasto y es aplicable para todos los casos de escurrimiento del líquido. La dificultad en el empleo de esta fórmula consiste en la valuación exacta del coeficiente de gasto  $\mu$ .

De la ecuación (9.6') resulta:

$$\mu = \frac{Q}{S_0 \sqrt{2gH}} = \frac{Q}{Q_t}.$$

Esto significa, que el coeficiente de gasto es la relación entre el gasto real y el teórico, es decir, el gasto ( $Q_t$ ) que tendría lugar si no existiera la contracción del chorro y la resistencia. Conviene tener en cuenta, que el término «gasto teórico» se emplea aquí de un modo convencional, ya que  $Q_t = S_0 \sqrt{2gH}$  no es el gasto durante el escurrimiento de líquido perfecto; para éste la contracción del chorro tendrá lugar también en caso de escurrimiento.

El gasto real es siempre menor que el teórico y, por consiguiente, el coeficiente de gasto  $\mu$  es siempre menor que la unidad, debido a la influencia de dos factores: contracción del chorro y la resistencia.

En unos casos ejerce mayor influencia el primer factor, en otros el segundo.

Los coeficientes de contracción  $\varepsilon$ , de resistencia  $\zeta$ , de velocidad  $\varphi$  y de gasto  $\mu$ , que hemos introducido en el análisis, dependen, en primer lugar, del tipo de orificio y de la boquilla adicional, y, lo mismo que todos los coeficientes adimensionales en Hidráulica, del criterio principal de la semejanza hidrodinámica, es decir, del número de Re.

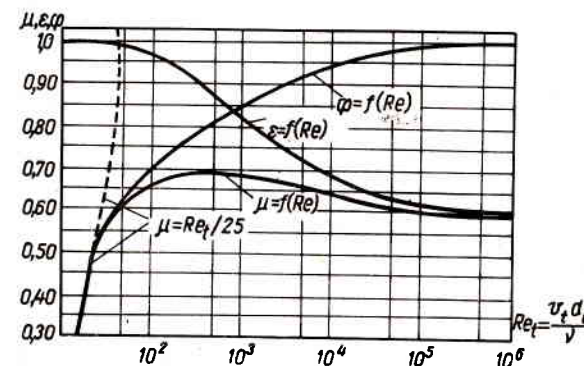


Fig. 84. Gráfica de  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  y  $\mu$  en función del número  $Re_t$

En la fig. 84 se muestra la dependencia de los coeficientes  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  y  $\mu$  para un orificio redondo, del número de Reynolds calculado según la velocidad teórica de escurrimiento, o sea

$$Re_t = \frac{v_t d_0}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH} d_0}{\nu}.$$

En la gráfica se ve que con el aumento de  $Re_t$ , es decir, con la disminución de la influencia de las fuerzas de viscosidad, aumenta el coeficiente  $\varphi$ , debido a la reducción del coeficiente de resistencia  $\zeta$ , mientras que el coeficiente  $\varepsilon$  disminuye, por disminuir el frenado de la velocidad en la embocadura del orificio y aumentar los radios admisibles de la curvatura de la superficie del chorro en el sector comprendido entre la arista y el comienzo de la parte cilíndrica. En este caso, ambos coeficientes ( $\varphi$  y  $\varepsilon$ ) van acercándose asintóticamente a los valores correspondientes al escurrimiento de líquido perfecto, es decir, con  $Re_t \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 1$  y  $\varepsilon \rightarrow 0,60$ .

El coeficiente de gasto  $\mu$  que se determina como producto de  $\varepsilon$  por  $\varphi$ , crece, primeramente, con el aumento de  $Re_t$ , lo que está condicionado por el crecimiento brusco de  $\varphi$ , y después de alcanzar el valor máximo ( $\mu_{máx.} = 0,69$ , siendo  $Re_t \approx 350$ ) disminuye, debido a la reducción considerable de  $\varepsilon$ , y con  $Re_t$  grandes, se hace prácticamente constante e igual a  $\mu = 0,59-0,60$ .



Siendo los números de  $Re_t$  muy pequeños ( $Re_t < 25$ ), la importancia de la viscosidad es tan grande y el frenado de la velocidad en la arista es tan considerable, que la contracción del chorro desaparece ( $\epsilon = 1$ ) y  $\varphi = \mu$ . El gasto  $Q$  en este caso es proporcional a la presión a la primera potencia, debido a lo cual el coeficiente de gasto es proporcional a  $Re_t$ . En este caso, se puede emplear la siguiente fórmula teórica confirmada experimentalmente:

$$Q = \frac{\pi d^3 g H}{50 \nu}, \quad (9.7)$$

a lo que corresponde

$$\mu = \frac{Re_t}{25}. \quad (9.8)$$

Para líquidos con valores insignificantes de la viscosidad (agua, gasolina, keroseno, etc.) y para un orificio redondo practicado en pared delgada, los coeficientes de escurrimiento varían entre límites reducidos, por eso, en los cálculos suelen adaptarse los valores promedios siguientes

$$\epsilon = 0,63; \quad \varphi = 0,97; \quad \mu = 0,61; \quad \zeta = 0,065.$$

En el caso analizado, es decir, durante el escurrimiento de líquidos poco viscosos por orificios redondos hechos en una pared delgada, tiene lugar una contracción considerable del chorro y una resistencia muy pequeña. Por eso, el coeficiente de gasto  $\mu$  en el caso dado resulta mucho menor que la unidad, debido principalmente a la influencia de la contracción del chorro.

### § 36. Contracción incompleta y parcial. Escurrimiento debajo del nivel

La así llamada **contracción incompleta** del chorro tiene lugar cuando en el escurrimiento del líquido por el orificio y en la formación del chorro influye la proximidad de las paredes laterales del recipiente, estando el orificio a una distancia igual de las mismas, es decir, en el eje simétrico del recipiente (fig. 85). Debido a que las paredes laterales dirigen en parte el movimiento del líquido al aproximarse al orificio, al salir el chorro de éste se contrae en grado menor que durante el escurrimiento a través de un recipiente de dimensiones ilimitadas, de la misma manera que se examinó anteriormente cuando tiene lugar la contracción completa.

Debido a la disminución de la contracción del chorro, aumenta el coeficiente de contracción y, por consiguiente, el de gasto. La solución teórica del problema del escurrimiento de líquido perfecto de un recipiente plano de anchura limitada y de longitud infinita a través de una hendidura en su pared lateral, es decir, la solución para el caso de contracción incompleta en corriente plana fue realizada ya en 1890 por el profesor N. Zhukovski.

Durante el escurrimiento de líquidos poco viscosos de un depósito cilíndrico de sección circular a través de un orificio redondo dispuesto en el centro de la pared lateral, el coeficiente de contracción  $\epsilon_1$ , puede hallarse por la siguiente fórmula empírica, en partes del coeficiente de la contracción completa  $\epsilon$ :

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon} = 1 + \frac{0,37}{\epsilon} n^2, \quad (9.9)$$

donde  $n = \frac{S_0}{S_1}$  es la relación entre el área del orificio y el de la sección transversal del recipiente.

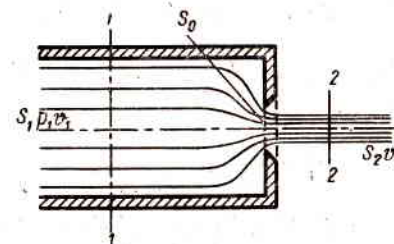


Fig. 85. Esquema de la contracción incompleta del chorro

El coeficiente de resistencia del orificio  $\zeta$ , así como el coeficiente de la velocidad  $\varphi$  en caso de contracción incompleta pueden ser considerados independientes de la relación de las áreas  $n$  (si, desde luego,  $n$  no es muy próximo a la unidad) y aproximadamente iguales para los líquidos poco viscosos:

$$\zeta = 0,065 \text{ y } \varphi = 0,97.$$

Por eso es fácil hallar el coeficiente de gasto  $\mu_1$  por medio de la ecuación

$$\mu_1 = \epsilon_1 \varphi,$$

el gasto se determinará por la fórmula:

$$Q = \mu_1 S_0 \sqrt{2gH}.$$

Sin embargo, al emplear esta fórmula, en caso de contracción incompleta, hay que tener en cuenta que la presión calculada  $H$  representa la presión total y es igual a:

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}.$$

Esto significa, que además de la presión hidrostática se debe tomar en cuenta también la presión dinámica en el recipiente. Pero, puesto que al determinar el gasto, la presión dinámica, generalmente, es también desconocida, es conveniente tener una fórmula que exprese



el gasto en caso de contracción incompleta, no por la presión total  $H$ , sino por la presión hidrostática.

Esta fórmula es fácil de obtener, si para las secciones 1—1 y 2—2 (véase la fig. 85) empleamos la ecuación de Bernoulli y la de igualdad de gasto, o sea:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}; \quad v_1 S_1 = v_2 \varepsilon_1 S_0.$$

De aquí se tiene

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta - \varepsilon_1^2 n^2}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$

y después

$$Q = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 + \zeta - \varepsilon_1^2 n^2}} S_0 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}} = \mu'_1 S_0 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}, \quad (9.10)$$

donde

$$\mu'_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1 + \zeta - \varepsilon_1^2 n^2}}. \quad (9.11)$$

Si el orificio es inmediato a la pared lateral (fig. 86), la contracción del chorro será *incompleta*, es decir, unilateral: a partir

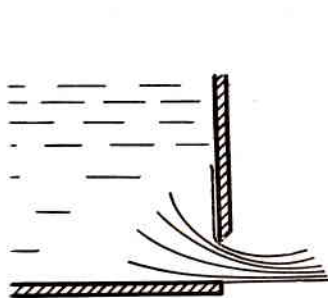


Fig. 86. Esquema de la contracción parcial del chorro

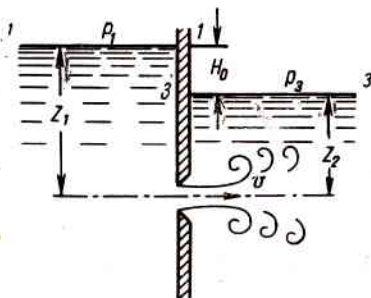


Fig. 87. Efluencia abajo del nivel

de la pared que dirige la corriente no habrá contracción. Por eso, los coeficientes de compresión y de gasto en caso de contracción incompleta ( $\varepsilon_2$  y  $\mu_2$ ) son mayores que cuando la contracción es completa ( $\varepsilon$  y  $\mu$ ).

El coeficiente  $\mu_2$  se puede hallar por la fórmula empírica:

$$\mu_2 = \mu \left( 1 + \frac{\Delta \text{Per.}}{\text{Per.}} \right), \quad (9.12)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de la forma igual a 0,128 para los orificios redondos y 0,152, para los cuadrados;

Per. es el perímetro del orificio;

$\Delta \text{Per.}$  es la parte de este perímetro que limita con la pared.

A menudo el escurrimiento del líquido no se verifica a la atmósfera, sino a un espacio conteniendo el mismo líquido (fig. 87). Este

caso se denomina *escurrimiento debajo del nivel o escurrimiento por orificio sumergido*.

Entonces, toda la energía cinética del chorro se pierde en la formación de turbulencias, lo mismo que en el caso de ensanchamiento brusco. Es por lo que la ecuación de Bernoulli para las secciones 1—1 y 3—3 (donde consideramos que las velocidades son iguales a cero) se expresará del modo siguiente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_3}{\gamma} + \sum h = z_2 + \frac{p_3}{\gamma} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}$$

o bien

$$H = H_0 + \frac{p_1 - p_3}{\gamma} = (\zeta + 1) \frac{v^2}{2g},$$

donde  $H$  es la presión calculada;

$v$  es la velocidad de escurrimiento en la sección contraída del chorro;

$\zeta$  es el coeficiente de resistencia del orificio, que tiene un valor aproximadamente igual al de escurrimiento a la atmósfera.

De aquí que:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}$$

$$Q = v S_{ch.} = \varepsilon \varphi S_0 \sqrt{2gH} = \mu S_0 \sqrt{2gH}.$$

De este modo, tenemos las mismas fórmulas de cálculo que para el escurrimiento al aire (gas), solamente que la presión  $H$  representa aquí la diferencia de presiones hidrostáticas a ambos lados de la pared.

Se puede considerar que los coeficientes de contracción y de gasto para el escurrimiento debajo del nivel son los mismos que para el escurrimiento al aire.

### § 37. Escurrimiento por boquillas adicionales

Se denomina boquilla exterior, a un tubo corto de forma cilíndrica con una longitud igual a varios diámetros [ $l = (2 - 6) d$ ] sin redondeamiento del borde de entrada (fig. 88, a). En la práctica, esta boquilla se forma a menudo cuando se perfora una pared gruesa y no se elabora el borde de entrada (fig. 88, b).

Durante el escurrimiento a un ambiente gaseoso a través de tal boquilla pueden observarse dos regímenes de corriente. El esquema de la corriente que corresponde al primer régimen se muestra en las figs. 88, a y b. El chorro a la entrada de la boquilla va contrayéndose por la misma causa y aproximadamente igual que en el caso de escurrimiento por un orificio practicado en una pared delgada. Después, al ser rodeada la parte contraída del chorro por torbellinos de líquido, la vena va ensanchándose poco a poco hasta adquirir las dimensiones del orificio, saliendo por toda la sección de la boquilla.



Puesto que a la salida de la boquilla adicional el diámetro del chorro es igual al del orificio, resulta que  $\varepsilon = 1$  y, por consiguiente,  $\mu = \varphi$ .

Los valores promedios de los coeficientes para este régimen de escurrimiento son (para líquidos poco viscosos) los siguientes:

$$\mu = \varphi = 0,82; \quad \zeta = 0,5.$$

Comparando con el orificio practicado en una pared delgada se ve que, en caso de escurrimiento del líquido por una boquilla adicional

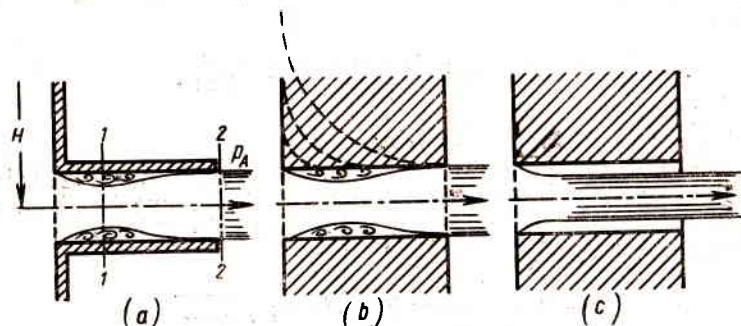


Fig. 88. Esquema de efluencia a través de una boquilla cilíndrica

cilíndrica (primer régimen), el gasto resulta mayor que por un orificio, debido a la ausencia de contracción del chorro al salir éste de la boquilla; al mismo tiempo, la velocidad resulta menor, porque la resistencia es considerablemente mayor.

Supongamos que el escurrimiento del líquido se verifica a la presión  $p_0$  a un ambiente gaseoso a presión  $p_2$ ; por ejemplo, a la cámara de combustión de un motor cohete de combustible líquido. Por consiguiente, la presión calculada en caso de contracción completa es igual a

$$H = \frac{p_0 - p_2}{\gamma}$$

Puesto que a la salida de la boquilla adicional la presión en el chorro es igual a  $p_2$ , en el lugar de contracción del chorro dentro de la boquilla donde la velocidad es mayor, la presión  $p_1$  es menor, si la comparamos con  $p_2$ . Además, cuanto mayor es la presión bajo la cual se verifica el escurrimiento y, por consiguiente, el gasto por la boquilla, tanto menor es la presión absoluta en el lugar de contracción del chorro dentro de la boquilla. La diferencia de presiones  $p_2 - p_1$  crece proporcionalmente a la presión  $H$ . Demostremos esto desarrollando la ecuación de Bernoulli para las secciones 1-1 y 2-2 (fig. 88, a) del modo siguiente:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

El último miembro de esta ecuación representa la pérdida de presión en el ensanchamiento de la corriente, la cual, en el caso dado, transcurre igual que al ensancharse bruscamente el cauce y, por consiguiente, se determina por la fórmula (8.1). La contracción del chorro dentro de la boquilla se valora por el mismo coeficiente de contracción  $\varepsilon$  que en el caso de un orificio, por eso, basándose en la ecuación de gasto, se puede anotar:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Eliminando con ayuda de esta relación la velocidad  $v_1$  de la ecuación de Bernoulli indicada más arriba y sustituyendo la velocidad  $v_2$  por su expresión con el coeficiente de velocidad de la boquilla o por la expresión  $v_2 = \varphi \sqrt{2gH}$ , encontraremos la caída de presión dentro de la boquilla, o sea:

$$p_2 - p_1 = \varphi^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \right] H\gamma. \quad (9.13)$$

Sustituyendo en ésta  $\varphi = 0,82$  y  $\varepsilon = 0,64$ , tendremos

$$p_2 - p_1 \approx 0,75H\gamma. \quad (9.13')$$

Con cierta presión crítica ( $H_{cr.}$ ), la presión absoluta dentro de la boquilla (sección 1-1) será igual a cero y

$$H_{cr.} \approx \frac{p_2}{0,75\gamma}. \quad (9.14)$$

Por consiguiente, siendo  $H > H_{cr.}$ , la presión  $p_1$  debería ser negativa, pero en los líquidos, por lo general, no suele haber presiones negativas, por eso, tampoco es posible el primer régimen de escurrimiento con  $H > H_{cr.}$ . Las experiencias confirman esto y demuestran que con  $H \approx H_{cr.}$  tiene lugar un cambio repentino del régimen de escurrimiento, el paso del primer régimen al segundo (fig. 88, c).

El segundo régimen de escurrimiento se caracteriza porque después de su contracción el chorro ya no se ensancha, sino que conserva la forma cilíndrica y pasa dentro de la boquilla sin tocar sus paredes. El escurrimiento es idéntico al de por un orificio practicado en una pared delgada, con los mismos valores de los coeficientes de escurrimiento. Por consiguiente, al pasar del primer régimen al segundo, la velocidad crece, pero el gasto disminuye debido a la contracción del chorro.

Si por la boquilla descrita se verifica el derrame de agua a la atmósfera, tenemos que

$$H_{cr.} \approx \frac{p_A}{0,75\gamma} = \frac{10,33}{0,75} \approx 14 \text{ m.}$$

Durante el escurrimiento por una boquilla cilíndrica debajo del nivel el segundo régimen es imposible. Con  $H > H_{cr.}$  se conserva el primer régimen, pero con el aumento de la presión  $H$ , el coeficiente



de gasto disminuye (el coeficiente de resistencia crece), porque dentro de la boquilla surge la cavitación.

De este modo, la boquilla cilíndrica exterior presenta defectos esenciales: en el primer régimen, una gran resistencia y un coeficiente insuficientemente grande de gasto; en el segundo, un valor muy reducido del coeficiente de gasto. Además, la deficiencia de esta boquilla consiste también en la inestabilidad del régimen de escurrimiento.

En vista de lo expuesto, no es recomendable aplicar una boquilla cilíndrica y, salvo en algunas excepciones (algunos tipos de motores cohete de combustible líquido), no se emplea.

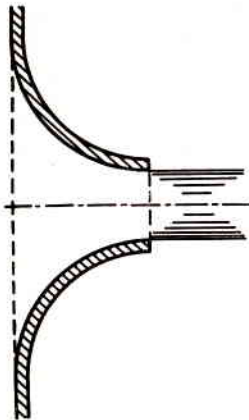


Fig. 89. Tobera

Puesto que en la práctica esta boquilla se forma a menudo como resultado de una perforación practicada en una pared gruesa, se puede perfeccionar considerablemente, achaflanando el borde de entrada (véase la línea punteada en la fig. 88). A mayor achaflanamiento, mayor será el coeficiente de gasto y menor el de la resistencia. En el límite, donde el radio de curvatura es igual al espesor de la pared, la boquilla cilíndrica se transforma en conoidal o en la así llamada tobera.

**Boquilla conoidal o tobera** (fig. 89). Esta es de aplicación muy frecuente porque asegura un coeficiente de gasto próximo a la unidad, pérdidas insignificantes, sin contracción del chorro al salir de la boquilla y régimen estable de escurrimiento con forma regular del chorro.

Los valores del coeficiente de resistencia son los mismos que se han dado para el estrechamiento gradual (§ 31), o sea

$$\zeta = 0,03 \div 0,10$$

(a grandes números de  $Re$  les corresponden pequeños  $\zeta$  y viceversa). De acuerdo con esto

$$\mu = \varphi = 0,99 \div 0,96$$

La **boquilla difusora** es una combinación de tobera y difusor (fig. 90). El acoplamiento del difusor a la tobera lleva consigo la disminución de la presión en la parte estrecha de la boquilla y, por consiguiente, el aumento de la velocidad y del gasto del líquido por la misma. Teniendo diámetro de sección contraída igual que la tobera y a la misma presión, la boquilla difusora puede proporcionar un gasto considerablemente mayor que la tobera (un aumento hasta 2,5 veces).

Tales boquillas se aplican cuando están predeterminados el diámetro de la sección contraída y el valor de la presión, y se necesita obtener el mayor gasto posible. Sin embargo, la aplicación de una

boquilla difusora es posible solamente con presiones insignificantes ( $H = 1 \div 4$  m), porque en caso contrario, en el lugar contraído de la boquilla surge la cavitación, cuyas consecuencias son: aumento de la resistencia y disminución de la capacidad de paso de la boquilla.

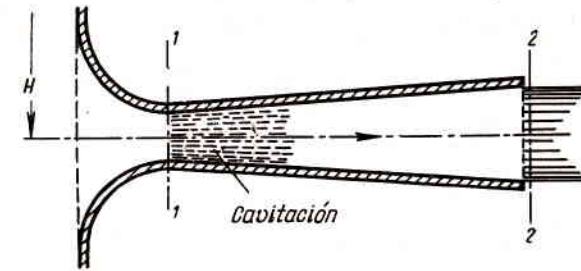


Fig. 90. Boquilla difusora

En la fig. 91 se presenta la caída del coeficiente de gasto de la boquilla difusora con el aumento de presión, debido a la cavitación que surge en la parte contraída de la boquilla. El coeficiente de gasto está relacionado al área de la sección estrecha, es decir  $\mu_1 = \frac{Q}{S_1 \sqrt{2gH}}$ .

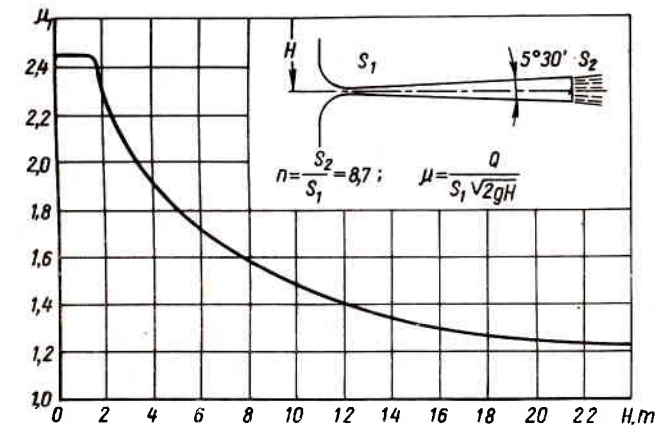


Fig. 91. Gráfica del coeficiente de gasto en función de la presión

La curva indicada fue obtenida experimentalmente de una boquilla difusora que presenta el ángulo y el grado más ventajosos de ensanchamiento, lo que asegura el máximo coeficiente de gasto.

**Ejemplo.** Para suministrar los componentes del propelente a las cámaras de combustión de varios motores cohete de combustible líquido se emplean los así llamados inyectores a chorro, es decir, orificios corrientes. Determinése la cantidad necesaria de estos inyectores en el motor del cohete «Schmetterling» para suministrar el oxidante, si  $G = 1,6$  kg/seg; la diferencia de presión en el inyector es  $\Delta p = 6$  kg/cm<sup>2</sup>; la presión en la cámara  $p_2 = 25$  kg/cm<sup>2</sup>; el diá-



metro del orificio  $d_0 = 1,5$  mm; la relación entre el espesor de la pared y el diámetro del orificio  $\delta/d_0 = 0,5$ . Como oxidante se emplea ácido nítrico con peso específico  $\gamma = 1.510$  kg/m<sup>3</sup> y de viscosidad  $\nu = 0,02$  cm<sup>2</sup>/seg.

¿Cuántos inyectores serían necesarios si  $\frac{\delta}{d_0}$  fuese igual a 2,5?

Solución. 1. Velocidad teórica de escurrimiento

$$v_t = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{6 \cdot 10^4}{1.510}} = 28 \text{ m/seg.}$$

2. Número de Reynolds

$$Re_t = \frac{v_t d_0}{\nu} = \frac{2.800 \cdot 0,15}{0,02} = 21.000.$$

3. De la gráfica (véase la fig. 84) por  $Re_t$  averiguamos el coeficiente de gasto  $\mu = 0,62$ .

4. El área total de los orificios de todos los inyectores  $S_0$  lo determinamos de la ecuación:

$$S_0 = \frac{G}{\gamma \mu v_t} = \frac{1,6 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 0,62 \cdot 2.800} = 0,61 \text{ cm}^2.$$

5. El número de inyectores será:

$$z = \frac{4S_0}{\pi d_0^2} = \frac{4 \cdot 0,61}{\pi \cdot 0,15^2} = 35.$$

6. Si la perforación tuviese la relación  $\delta/d = 2,5$ , entonces el escurrimiento del propelente se verificaría igual que en una boquilla cilíndrica exterior.

Para determinar el régimen de escurrimiento hallamos  $\Delta p_{cr.}$ , por la fórmula (9.13')

$$\Delta p_{cr.} = \frac{25}{0,75} = 33,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Puesto que  $\Delta p_{cr.} > \Delta p$ , tendrá lugar el primer régimen con coeficiente de gasto  $\mu = 0,82$ . Por consiguiente

$$z_1 = z \frac{\mu}{\mu_1} = 35 \frac{0,62}{0,82} = 27.$$

### § 38. Escurrimiento a presión variable (vaciado de los recipientes)

Analicemos el vaciado de un recipiente de forma cualquiera, abierto a la atmósfera, a través de un orificio o una boquilla con coeficiente de gasto  $\mu$  (fig. 92). Aquí el escurrimiento se verifica con una presión variable que disminuye gradualmente, o sea, propiamente dicho, la corriente no es estable.

Sin embargo, si la presión y, por lo tanto, la velocidad de escurrimiento cambian paulatinamente, el movimiento en cada momento dado se puede considerar como estable y para la solución del problema es posible emplear la ecuación de Bernoulli.

Designando la altura variable del nivel del líquido en el recipiente a contar del fondo con  $h$ , el área de la sección del recipiente a este nivel con  $S$ , y el área del orificio con  $S_0$ , y tomando un período

infinitesimal de tiempo  $dt$ , se puede anotar la siguiente ecuación de volúmenes:

$$S dh = -Q dt \quad (9.15)$$

o bien,

$$S dh = -\mu S_0 \sqrt{2gh} \cdot dt,$$

donde  $dh$  es el descenso del nivel del líquido en el recipiente durante  $dt$ .

El signo «menos» se debe al hecho de que al incremento positivo  $dt$  le corresponde el negativo  $dh$ .

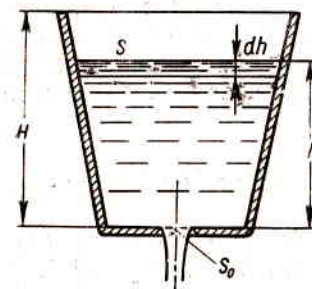


Fig. 92. Esquema de vaciado de un recipiente

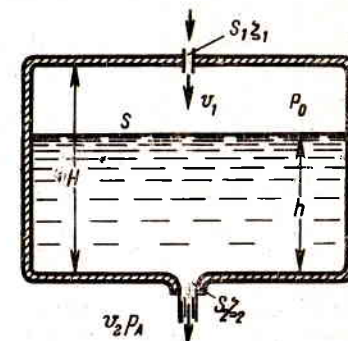


Fig. 93. Vaciado de un depósito de drenaje

De donde el tiempo de vaciado completo del recipiente de altura  $H$  (considerando  $\mu = \text{const.}$ ) se halla del modo siguiente:

$$t = -\frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h=H}^{h=0} S \frac{dh}{\sqrt{h}}. \quad (9.16)$$

La integral puede ser calculada si es conocida la ley de variación del área  $S$  en función de la altura  $h$ . Para un recipiente rectangular  $S = \text{const.}$ , por consiguiente,

$$t = \frac{S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}. \quad (9.17)$$

$$t = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \sqrt{H} = \frac{2SH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}}.$$

El numerador de esta fórmula es igual al doble del volumen del recipiente y el denominador representa el gasto en el momento inicial del vaciado, o sea, con la presión  $H$ . Por consiguiente, el tiempo del vaciado completo del recipiente es dos veces mayor que el del escurrimiento del mismo volumen del líquido con presión constante, igual a la inicial.



Las fórmulas (9.16) y (9.17) son aplicables también para determinar el tiempo de llenado de los recipientes a presión variable que va disminuyendo desde  $h = H$  hasta  $h = 0$ .

En la técnica de aviación nos encontramos con el vaciado de recipientes cerrados (depósitos) que se comunican con la atmósfera a través de un orificio boquilla o tubo de drenaje de diámetro reducido (fig. 93). En este caso, durante el escurrimiento del líquido del recipiente, el aire ambiente penetra al interior del recipiente, donde se establece el vacío. Por eso, el vaciado del recipiente transcurre despacio y tanto más despacio, cuanto más difícil es el acceso del aire al recipiente.

Determinemos el tiempo de vaciado de un recipiente semejante, para lo cual escribamos dos ecuaciones de Bernoulli: una, para el movimiento del aire de la atmósfera inmóvil al interior del recipiente, y otra, para el movimiento del líquido desde la superficie libre hasta la salida a la atmósfera. Aplicando las designaciones indicadas en la fig. 93, anotemos

$$\frac{p_A}{\gamma_a} = \frac{p_0}{\gamma_a} + (1 + \zeta_1) \frac{v_1^2}{2g}; \quad h + \frac{p_0}{\gamma_l} = \frac{p_A}{\gamma_l} + (1 + \zeta_2) \frac{v_2^2}{2g}.$$

En el caso dado, la compresibilidad del aire puede no tomarse en cuenta, por eso, los gastos volumétricos del aire y del líquido pueden ser equiparados, es decir,

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

(Si el chorro se contrae, hay que introducir además el coeficiente  $\epsilon_1$ ). Ahora las ecuaciones anteriores se escribirán del modo siguiente:

$$p_A = p_0 + (1 + \zeta_1) \frac{Q^2}{2g S_1^2 \gamma_a};$$

$$h \gamma_l + p_0 = p_A + (1 + \zeta_2) \frac{Q^2}{2g S_2^2 \gamma_l}.$$

Sumando estas ecuaciones y despejando  $Q$  tenemos

$$Q = \sqrt{\frac{2gh\gamma_l}{\frac{1+\zeta_1}{S_1^2} \gamma_a + \frac{1+\zeta_2}{S_2^2} \gamma_l}}. \quad (9.18)$$

Introduciendo la expresión (9.18) en la ecuación de volúmenes (9.15), despejando  $dt$  e integrando después entre los límites  $h = H$  hasta  $h = 0$ , tendremos

$$t = \frac{2SH}{\sqrt{2gH\gamma_l}} \sqrt{\frac{1+\zeta_1}{S_1^2} \gamma_a + \frac{1+\zeta_2}{S_2^2} \gamma_l}. \quad (9.19)$$

La fórmula obtenida es aplicable también cuando el aire entra en el recipiente y el líquido escurre del mismo a través de un tubo, pero

entonces en lugar del correspondiente coeficiente  $\zeta$  hay que poner

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta_{loc.},$$

donde  $l$  y  $d$  son la longitud y el diámetro del tubo;

$\Sigma \zeta_{loc.}$  es la suma de coeficientes de las resistencias locales en el tubo.

Como otro ejemplo de escurrimiento del líquido bajo la acción de una presión variable puede servir el proceso de amortiguación durante el aterrizaje del avión. El hidroamortiguador neumático del tren de aterrizaje (fig. 94) contiene en su parte superior aire comprimido cuya presión durante el vuelo es igual a  $p_0$ . Después de tocar tierra las ruedas del avión, el líquido se derrama a través del orificio de área  $S_0$ , con el coeficiente de gasto  $\mu$ , y el volumen del aire se comprime hasta la presión  $p_1$ . La altura del volumen del aire disminuye desde  $h_0$  hasta  $h_1$ .

Simplificando el proceso real de la amortiguación consideraremos que al amortiguador se le aplica repentinamente una fuerza constante  $G$  y el aire se comprime isotérmicamente. Hallemos la duración del proceso de la amortiguación, es decir, el derrame del líquido hasta que se establezca el estado de equilibrio.

Lo mismo que en la ecuación (9.15) tenemos

$$S dh = -Q dt,$$

donde  $S$  es el área del émbolo;

$dh$  es el descenso del cilindro durante el tiempo  $dt$ .

El gasto a través del orificio es igual a

$$Q = \mu S_0 \sqrt{2g \frac{p_1 - p}{\gamma}}.$$

Aquí  $p_1$  es la presión constante encima del émbolo, igual a  $p_1 = \frac{G}{S}$ ;

$p$  es la presión variable del aire, que se determina por la ecuación de la isoterma

$$p = (p_0 + p_A) \frac{h_0}{h} - p_A.$$

Después de sustituir en la ecuación (9.15) los valores  $p_1$  y  $p$ , tendremos

$$dt = - \frac{S \sqrt{\gamma}}{\mu S_0 \sqrt{2g (p_1 - p_A)}} \sqrt{\frac{h}{h - h_1}} dh,$$

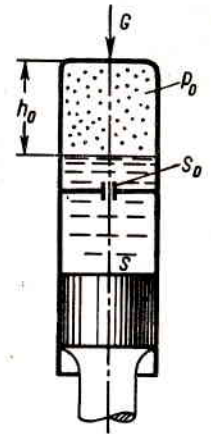


Fig. 94. Esquema del montante de amortiguación del tren de aterrizaje



donde

$$h_1 = \frac{p_0 + p_A}{p_1 + p_A} h_0.$$

Después de integrar entre límites  $h = h_0$  hasta  $h = h_1$ , encontramos el tiempo buscado  $t$ .

### § 39. Inyector

Se denomina inyector, una boquilla especial que realiza la pulverización del líquido, es decir, el escurrimiento cuando el chorro al salir a la atmósfera (o al espacio con presión elevada del gas) va disgregándose inmediatamente en gotas pequeñísimas.

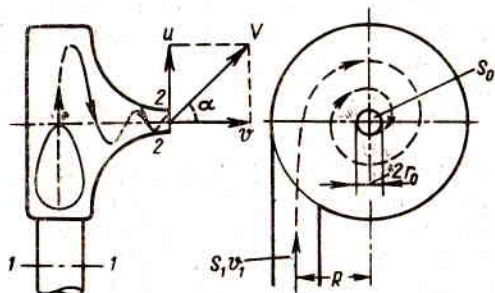


Fig. 95. Esquema de un inyector centrífugo

En los turbomotores de gas de aviación, así como en los motores cohete de combustible líquido se emplean ampliamente los inyectores centrífugos o de remolino para pulverizar el combustible en las cámaras de combustión.

El principio del funcionamiento de tal inyector consiste en lo siguiente: primeramente se le comunica un movimiento rotatorio al flujo del líquido y después se estrecha el flujo (fig. 95). El momento de la cantidad de movimiento (rotación) creado gracias al suministro tangencial del líquido queda aproximadamente constante durante el movimiento del líquido en el interior del inyector; por lo tanto, mientras el flujo se va estrechando, aumenta considerablemente el componente rotatorio de la velocidad, surgen potentes fuerzas centrífugas que presionan al flujo contra las paredes y forman una capa fina, que al salir del inyector, se disgrega en gotas pequeñísimas. A lo largo del eje del inyector se forma un remolino aéreo (gaseoso) con una presión sobre la superficie próxima a la atmosférica (durante el escurrimiento a la atmósfera). Este remolino aéreo es muy parecido al embudo (fig. 96) que se forma al vaciar los recipientes a través de un orificio en el fondo, pero en el inyector el remolino es mucho más intenso.

De este modo, el flujo del líquido no llena todo el orificio de salida del inyector; el flujo tiene su sección transversal en forma anular, cuya parte central está ocupada por un remolino aéreo (fig. 97). Por eso, el coeficiente de contracción  $\epsilon$  para el inyector es generalmente mucho menor que la unidad.

Debido a esta circunstancia y puesto que la resultante de la velocidad de escurrimiento del inyector  $V$  (fig. 95) no está dirigida perpendicularmente a la superficie del orificio, sino bajo cierto ángulo  $\alpha$ ,



Fig. 96. Embudo de remolino

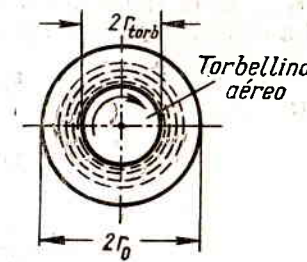


Fig. 97. Sección transversal del remolino en el inyector

cuya tangente es igual a la proporción entre el componente rotatorio  $u$  y el axial  $v$ , el coeficiente de gasto del inyector es siempre considerablemente menor que la unidad y varía ampliamente en dependencia de la forma y de la relación de las dimensiones del inyector.

Para determinar el rendimiento del inyector según la ecuación (9.6)

$$Q = \mu S_0 \sqrt{2g \frac{p}{\gamma}}.$$

hay que saber el valor bastante exacto del coeficiente de gasto  $\mu$ .

La teoría del inyector fundada por el profesor G. Abramovich permite hallar el coeficiente  $\mu$  según las dimensiones y la forma del inyector. Expongamos brevemente esta teoría para el caso de un líquido perfecto, para lo cual escribamos las siguientes tres ecuaciones de partida:

1) La ecuación de Bernoulli para las secciones 1—1 2—2 (véase la fig. 95).

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

o bien,

$$H = \frac{v^2 + u_{a\text{érea}}^2}{2g},$$

donde  $H$  es la presión calculada e igual a:  $H = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$ ;  $v$  y  $u_{a\text{érea}}$  son los componentes axial y rotatorio de la velocidad en la sección 2—2, en la superficie del remolino aéreo.



2) La ecuación de la constancia del momento de la cantidad de movimiento del líquido para las mismas secciones respecto al eje del inyector

$$Q \rho R v_1 = Q \rho u_{\text{aérea}} r_{\text{rem.}}$$

o bien,

$$u_{\text{aérea}} = v_1 \frac{R}{r_{\text{rem.}}},$$

donde  $r_{\text{rem.}}$  es el radio del remolino aéreo en la sección 2—2.

3) La ecuación de gasto para las mismas secciones <sup>1)</sup>

$$v_1 S_1 = \varepsilon S_0 v$$

o bien,

$$v_1 = \frac{\varepsilon S_0 v}{S_1},$$

donde

$$\varepsilon = \frac{S_0 - S_{\text{rem.}}}{S_0} = 1 - \frac{r_{\text{rem.}}^2}{r_0^2}.$$

De la última expresión tenemos

$$r_{\text{rem.}} = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon},$$

sustituyendo  $r_{\text{rem.}}$  en la segunda ecuación de 2) nos da

$$u_{\text{aérea}} = v_1 \frac{R}{r_0 \sqrt{1 - \varepsilon}}.$$

Aplicando la tercera ecuación en vez de la anterior, tendremos

$$u_{\text{aérea}} = \frac{\varepsilon S_0 v R}{S_1 r_0 \sqrt{1 - \varepsilon}} = A \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon}} v,$$

donde  $A = \frac{S_0 R}{S_1 r_0}$  es el parámetro que caracteriza la forma del inyector.

Introduciendo la expresión obtenida para  $u_{\text{aérea}}$  en la ecuación de Bernoulli, segunda ecuación de 1), tendremos

$$H = \frac{v^2}{2g} \left( 1 + A^2 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon} \right),$$

de donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}}} \sqrt{2gH}.$$

Ahora podemos expresar el gasto como producto de la velocidad por el área de la corona circular del flujo en la sección de salida del

<sup>1)</sup> Se supone que la distribución de las velocidades axiales por la sección anular del flujo a la salida del inyector es uniforme.

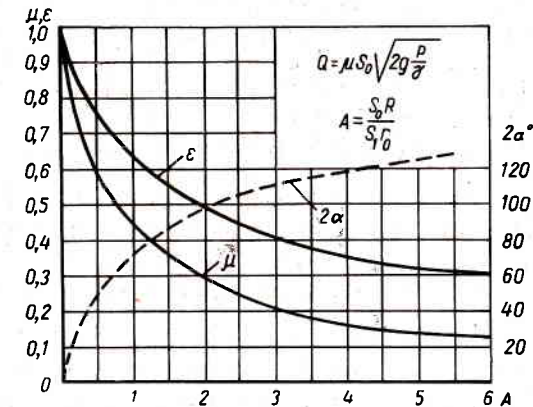
inyector, o sea

$$Q = \varepsilon S_0 v = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + A^2 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}}} S_0 \sqrt{2gH}.$$

De este modo, el coeficiente de gasto del inyector es igual

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + A^2 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{A^2}{1 - \varepsilon}}}. \quad (9.20)$$

Pero no sabemos el coeficiente  $\varepsilon$ , es decir, no sabemos la magnitud del remolino aéreo (del radio  $r_{\text{rem.}}$  para  $r_0$  y  $A$  dados) y para su determinación hace falta admitir cierta condición complementaria. Para



F i g. 98. Gráfica de  $\varepsilon$ ,  $\mu$  y  $\alpha$  en función de  $A$

esto, G. Abramovich propuso la siguiente hipótesis confirmada más tarde experimentalmente: el remolino es estable cuando su dimensión asegura el gasto máximo  $Q$  con la presión dada  $H$  o, en otras palabras, cuando se establece tal régimen de escurrimiento que para obtener el gasto dado se necesita la presión mínima.

Para hallar el valor de  $\varepsilon$  correspondiente al coeficiente máximo de gasto  $\mu$  efectuamos la diferenciación del radicando en la fórmula (9.20) por  $\varepsilon$  e igualamos a cero.

Tendremos

$$-\frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{A^2}{(1 - \varepsilon)^2} = 0.$$

de donde

$$A = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_3} (1 - \varepsilon)}. \quad (9.21)$$

La fórmula obtenida permite construir la gráfica de  $\varepsilon$  en función de  $A$  (véase la fig. 98); utilizando esta gráfica y la fórmula (9.20)



se pueden calcular los valores de  $\mu$  para diferentes valores del parámetro  $A$  y trazar la gráfica de  $\mu$  en función de  $A$  (fig. 98).

Como se ve en la gráfica el coeficiente  $\mu$  disminuye al aumentar el parámetro  $A$ . La naturaleza física de este fenómeno consiste en que al aumentar  $A$  se incrementa la rotación del flujo al salir del inyector, es decir, se incrementa cada vez más la velocidad de rotación  $\mu$ , en comparación con la velocidad de entrada  $v_1$ , y, por consiguiente, la intensidad del remolino en el inyector. Por eso, crece el diámetro del remolino, disminuye el área de la sección del flujo y, además, una parte cada vez mayor de la energía disponible  $H$  se gasta para la creación de la velocidad de rotación del líquido. Con  $A = 0$  ( $R = 0$ )  $\mu = 1$ , es decir, cuando la rotación del flujo es nula, el inyector funciona como una tobera corriente.

Basándose en las fórmulas expuestas más arriba, es fácil determinar el ángulo de pulverización del líquido (ángulo de llama del inyector)  $\alpha$  (véase la fig. 98). Con el aumento del parámetro  $A$  crece el ángulo  $\alpha$ , pero el coeficiente de gasto disminuye. Por eso, al construir un inyector, el parámetro  $A$  se elige de tal modo que asegure un ángulo  $\alpha$  bastante grande (hasta  $60^\circ$ ), sin ser el valor del coeficiente  $\mu$  demasiado reducido.

La teoría expuesta sobre el inyector sirve para un líquido perfecto. Durante el paso del fluido por el inyector, la viscosidad del líquido se manifiesta en que el momento de la cantidad de movimiento no es constante, sino que disminuye según se va aproximando a la salida del inyector.

Por esta razón, los componentes rotatorios de la velocidad resultan menores en la sección de salida y el gasto mayor, que durante el escurrimiento de un líquido perfecto, lo que a primera vista parece paradójico.

Equiparando la influencia de la viscosidad a cierta disminución del parámetro  $A$ , podemos emplear la noción de un parámetro equivalente  $A_{\text{equiv.}}$ , que se expresa con la fórmula siguiente:

$$A_{\text{equiv.}} = \frac{A}{1 + \frac{\lambda_{\text{inyect.}}}{2} \left( \frac{\pi R^2}{S_1} - A \right)},$$

donde  $\lambda_{\text{inyect.}}$  es el coeficiente de rozamiento en el inyector, el cual se puede encontrar en la tabla 5 en función del número de Reynolds, calculado según la dimensión y la velocidad a la entrada del inyector.

Tabla 5

$Re_1$	$1,5 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$
$\lambda_{\text{inyect.}}$	0,22	0,11	0,077	0,055	0,04	0,03

Por medio del parámetro  $A_{\text{equiv.}}$ , calculado del modo indicado, se determina el coeficiente de gasto  $\mu$  y el ángulo  $\alpha$ , teniendo en cuenta la viscosidad del líquido según la misma gráfica de Abramovich (fig. 98), donde en vez de  $A$  se toma  $A_{\text{equiv.}}$ . Puesto que generalmente  $A_{\text{equiv.}} < A$ , el coeficiente  $\mu$  (teniendo en cuenta la viscosidad) resulta algo mayor, y el ángulo  $\alpha$ , menor, que sin contar con ella.

Para obtener la rotación del flujo en los inyectores de los motores cohete de combustible líquido se emplea a menudo, en lugar de suministro tangencial de líquido, un pulverizador de remolino, es decir, un tornillo de dos o tres espiras colocado en el inyector. El líquido pasa por los canales helicoidales del pulverizador y adquiere de este modo el movimiento rotatorio necesario (fig. 99).

La teoría del inyector indicada más arriba también es aplicable a este caso, pero es necesario calcular el coeficiente según la siguiente fórmula:

$$A = \frac{S_0 r_{\text{med.}} \cos \varphi}{S_n n r_0}, \quad (9.22)$$

donde  $r_{\text{med.}}$  es el radio medio de la rosca helicoidal;

$S_n$  es el área de la sección normal del canal helicoidal;

$n$  es el número de entradas del tornillo;

$\varphi$  es el ángulo de elevación de la línea helicoidal.

En los turbomotores de gas modernos se emplean con frecuencia inyectores centrífugos regulables, cuyo coeficiente de gasto (o área del orificio de salida) cambia automáticamente según la variación de la presión del combustible. La aplicación de estos inyectores permite ampliar los límites del consumo de combustible, siendo invariables los límites de presiones y conservar, al mismo tiempo, la calidad debida de pulverización.

Entre los inyectores regulables más difundidos, están los de dos toberas, los de dos etapas y los de válvulas de paso. Su rasgo común consiste en que todos ellos están dotados de una válvula, la cual, al aumentar la presión, abre (o cierra) un canal complementario y aumenta, de este modo, el coeficiente de gasto o el área del orificio de salida.

En el inyector de dos toberas (fig. 100) tenemos de hecho dos inyectores: uno de los cuales va dispuesto dentro del otro. Si la presión es reducida, la válvula está cerrada y funciona el primer inyector (interior); al aumentar la presión, la válvula se abre y el segundo inyector se pone en funcionamiento, aumentando bruscamente el suministro del combustible.

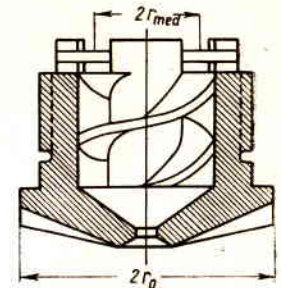


Fig. 99. Esquema del inyector con pulverizador de remolino



En el inyector de dos etapas (fig. 101) hay una tobera y una cámara común de formación de remolinos, pero dos canales de entrada. Si la presión es reducida, el combustible se proporciona a través de uno de éstos, y, si es elevada, a través de ambos. Debido a lo cual, el parámetro  $A$  disminuye y el coeficiente  $\mu$  aumenta.

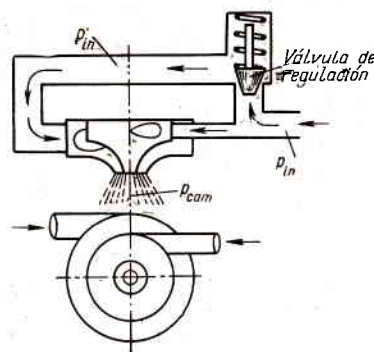


Fig. 100. Esquema de un inyector de dos toberas

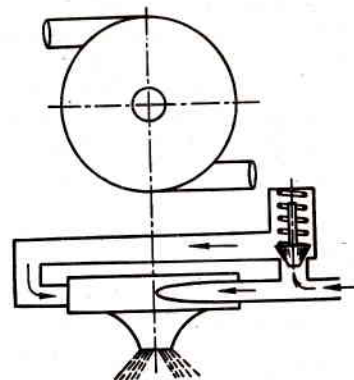


Fig. 101. Esquema de un inyector de dos etapas

El inyector con válvula de paso para el combustible (fig. 102) está provisto de una línea de rebose, en la cual va puesta una válvula. Cuanto menor es la presión del combustible, tanto más se abre la

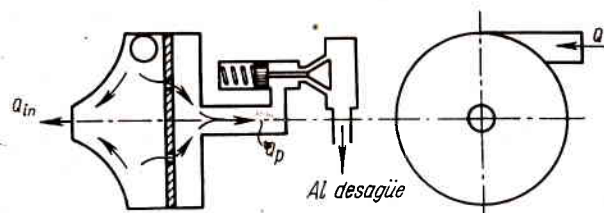


Fig. 102. Esquem de un inyector con válvulas

válvula, cerrando completamente la línea de rebose cuando la presión es máxima. De este modo, si la presión es reducida, la velocidad en la entrada es grande, lo que equivale a la disminución del área de la entrada y esto significa el aumento del parámetro equivalente  $A_{equiv}$ . y la disminución de  $\mu$ , que es lo que se necesita para ampliar los límites del consumo.

El cálculo de estos inyectores regulables se puede efectuar basándose en la misma teoría de Abramovich, pero hay que tener en cuenta sus particularidades propias indicadas más arriba (véase los ejemplos).

**Ejemplo 1.** Trácese la característica hidráulica del inyector de dos toberas descrito más arriba (véase la fig. 100), es decir, la gráfica del gasto en función de la diferencia de presión en el inyector, si la segunda tobera (segundo canal) se pone en funcionamiento cuando la diferencia de presiones es igual a  $\Delta p_0$ . Las características geométricas de ambos canales del inyector (dimensiones y parámetros de  $A_1$  y  $A_2$ ) y la característica hidráulica de la válvula reguladora son conocidas. Resuélvase el problema en la forma general.

**Solución 1.** Por los valores de  $A_1$  y  $A_2$  obtenidos, hallamos  $\mu_1$  y  $\mu$  de la gráfica (véase la fig. 98).

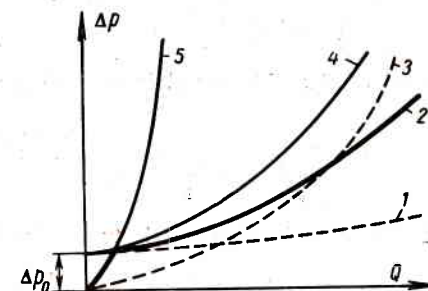


Fig. 103. Características del inyector (de dos toberas):  
1 - de la válvula; 2 - del inyector; 3 - del segundo canal; 4 - de la válvula del segundo canal; 5 - del primer canal

2. Empleando las fórmulas

$$Q = \mu_1 S_1 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}} \quad \text{y} \quad Q_2 = \mu_2 S_2 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}},$$

trazamos las características del primer y segundo canales del inyector (fig. 103).

3. Sumamos las características de la válvula reguladora y del segundo canal del inyector. Conviene tener en cuenta, que la diferencia de presión en el inyector  $\Delta p$  en el segundo canal se gasta, tanto en el mismo inyector como en la válvula. Por eso, al sumar las características hay que añadir las ordenadas  $\Delta p$  para los valores dados del gasto.

4. Para obtener la característica hidráulica total del inyector sumamos las características del primer y segundo canales con la válvula, añadiendo los gastos (véase la fig. 103).

**Ejemplo 2.** Hállese el valor del parámetro del inyector centrífugo con válvula de paso  $A_1$ , si el suministro total del combustible al inyector es  $Q = Q_{in} + Q_p$ , donde  $Q_{in}$  es el gasto a través del orificio del inyector y  $Q_p$  es el gasto de paso (véase la fig. 102).

**Solución 1.** Introduzcamos el coeficiente de paso  $k_p$  igual a

$$k_p = 1 + \frac{Q_p}{Q_{in}} = \frac{Q}{Q_{in}}.$$

2. El suministro del combustible al inyector por los canales de entrada es igual a

$$Q = k_p Q_{in} = v_1 S_1.$$

3. La cantidad de combustible que ha pasado por la tobera del inyector es

$$Q_{in} = \varepsilon S_0 v,$$

Por consiguiente

$$v_1 S_1 = k_p \varepsilon S_0 v,$$



de donde

$$v_1 = \frac{k_p \varepsilon S_0 v}{S_1}$$

4. Introduciendo el valor hallado de  $v_1$  en la ecuación del momento de la cantidad de movimiento y, después, en la ecuación de Bernoulli, hallaremos la velocidad  $v$ , tal como se ha hecho anteriormente, es decir,

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + k_p^2 A^2 \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}}} \sqrt{2gH}.$$

5. El suministro del combustible por el inyector  $Q_{in.}$  se determinará por la fórmula

$$Q_{in.} = \varepsilon S_0 v = \frac{S_0}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + k_p^2 A^2 \frac{1}{1 - \varepsilon}}} \sqrt{2gH}.$$

6. Comparando la fórmula obtenida con la expresión (9.20) establecemos que

$$A_1 = k_p A.$$

## 10

### ***Movimiento relativo y no estable del líquido en los tubos***

#### **§ 40. Ecuación de Bernoulli para el movimiento relativo**

La ecuación de Bernoulli en su forma (4.16) es justa para los casos de la corriente estable de líquido cuando de todas las fuerzas de masa sobre éste actúa solamente la de gravedad. Pero en la construcción de máquinas y en la aviación tropezamos con corrientes, en las cuales, además de la fuerza de gravedad, sobre el líquido actúan también fuerzas de masa de inercia del movimiento de traslación. Esto tiene lugar en los casos en que el cauce mismo (por ejemplo, una tubería) por el cual fluye la corriente, se desplaza en el espacio con una u otra aceleración. Si la fuerza de inercia que surge es constante en el tiempo, la corriente del líquido respecto a las paredes del cauce puede ser estable y es posible deducir para ésta la ecuación del balance de energía, teniendo en cuenta el trabajo de las fuerzas de inercia. Esta será la ecuación de Bernoulli para el movimiento relativo y se anota generalmente en la forma siguiente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h + \Delta H_{in.}, \quad (10.1)$$

donde  $H_{in.}$  es la así llamada presión de inercia, que representa la diferencia entre la energía específica potencial en la segunda y primera secciones dependiente de la acción de la fuerza de inercia, o, lo que es lo mismo, el trabajo de la fuerza de inercia relacionado a la unidad de peso y tomado con signo contrario<sup>1)</sup>.

Examinemos el cálculo de la magnitud de la presión de inercia para los siguientes dos casos principales del movimiento estable relativo del líquido, que corresponden a los dos casos de reposo relativo examinados en los §§ 11 y 12.

#### **1. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado del cauce.**

Si el cauce por el cual corre el líquido se mueve en forma rectilínea con aceleración constante  $a$ , en este caso (fig. 104) sobre todas

<sup>1)</sup> El signo contrario se toma porque este término es trasladado al miembro derecho de la ecuación, mientras que hemos anotado el trabajo de las fuerzas exteriores, al deducir la ecuación de Bernoulli en el § 15, en el miembro izquierdo de la ecuación.



las partículas del líquido que corre por el cauce dado, actúa una fuerza de inercia del movimiento de traslación igual y constante en el tiempo, la cual puede favorecer u obstaculizar el movimiento de la corriente.

Esta fuerza relacionada a la unidad de masa es igual a la aceleración correspondiente  $a$  y está dirigida en sentido contrario a la ace-

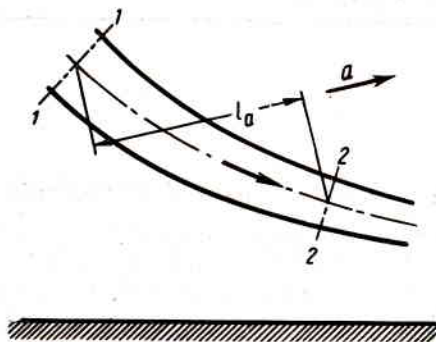


Fig. 104. Corriente en un cauce que se mueve con aceleración

leración, actuando sobre cada kilogramo del líquido la fuerza de inercia igual a

$$\frac{1}{g} a.$$

Durante la traslación del líquido de la primera sección a la segunda, el trabajo de esta fuerza (lo mismo que el de la fuerza de gravedad) no depende de la forma del cauce, sino que está determinada solamente por la diferencia de coordenadas, contadas en el sentido de la aceleración  $a$ , y por consiguiente, es igual a

$$\Delta H_{in.}^* = \frac{a}{g} l_a \quad (10.2)$$

donde  $l_a$  es la proyección del tramo del cauce estudiado sobre la dirección de la aceleración  $a$ .

Para no confundir el signo con el cual la magnitud  $\Delta H_{in.}$  debe ser anotada en el miembro derecho de la ecuación de Bernoulli, podemos guiarnos por la regla siguiente que se deriva directamente de la explicación física del fenómeno.

Si la aceleración  $a$  está dirigida de la primera sección a la segunda y la fuerza de inercia en sentido contrario, entonces esta fuerza obstaculiza la corriente del líquido y la presión de inercia debe tener el signo «más». En este caso la presión de inercia disminuirá la presión en la segunda sección en comparación con la primera, y, por consiguiente, ejercerá una acción análoga a las pérdidas hidráulicas  $\Sigma h$ ,

las cuales siempre se ponen en el miembro derecho de la ecuación de Bernoulli con el signo «más».

En cambio, si la aceleración  $a$  está dirigida de la segunda sección a la primera, la fuerza de inercia favorece el movimiento de la corriente y la presión de inercia debe tener el signo «menos». En este caso la presión de inercia aumentará la presión en la segunda sección, es decir, ejercerá una acción contraria a las pérdidas hidráulicas.

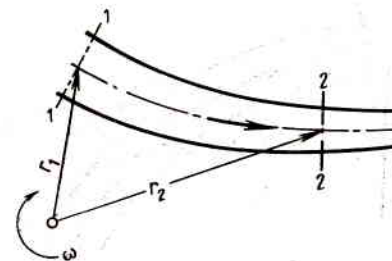


Fig. 105. Corriente en un cauce en rotación

**2. Rotación del cauce alrededor de un eje vertical.** Supongamos que el cauce por el cual corre el líquido gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular  $\omega$  constante (fig. 105). En este caso sobre el líquido actuará la fuerza de inercia del movimiento rotatorio que es función del radio. Por eso, para calcular el trabajo de esta fuerza, o el cambio de la energía potencial, condicionada por su acción, hay que efectuar una integración.

Sobre la unidad de peso actuará la fuerza de inercia igual a

$$\frac{\omega^2}{g} r.$$

El trabajo de esta fuerza, al desplazarse una distancia  $dr$  a lo largo del radio, será igual a

$$\frac{\omega^2}{g} r dr,$$

y al desplazarse del radio  $r_1$  al radio  $r_2$  (por cualquier curva), el valor del trabajo se hallará integrando esta expresión entre los límites  $r_1$  y  $r_2$ . Una vez efectuada la integración, hallaremos la magnitud de la presión de inercia, sólo que debe invertirse el signo (como se ha indicado más arriba, al deducir la ecuación de Bernoulli este término lo trasladamos del miembro izquierdo de la ecuación al derecho).

Definitivamente tendremos

$$\Delta H_{in.} = -\frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2). \quad (10.3)$$

*Carlos Thomasset*



El signo de la presión de inercia que se obtiene al calcularla por esta fórmula, corresponde a la regla de los signos indicada anteriormente.

Hay que tener en cuenta, que la ecuación de Bernoulli para los casos considerados de movimiento relativo de un líquido perfecto, también puede obtenerse mediante la integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento (véase el apéndice).

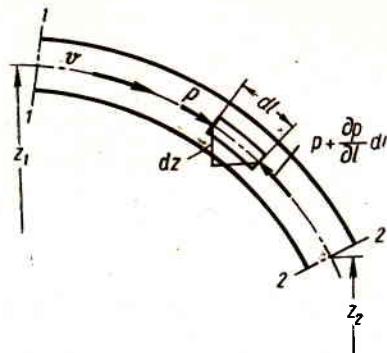


Fig. 106. Esquema de la corriente no estacionaria en un tubo

#### § 41. Corriente de líquido no estable en los tubos

Puesto que la corriente de líquido no estable es, en general, bastante complicada, nos limitaremos al caso particular principal, con el cual nos enfrentamos en la técnica de aviación: el de la corriente de líquido no estable en un tubo de sección constante, y en una unión en serie de varios tubos.

Tomemos un tubo de longitud  $l$  y diámetro  $d$  dispuesto a voluntad en el espacio (fig. 106) y designemos las alturas de nivel de sus secciones, inicial (1—1) y final (2—2), por  $z_1$  y  $z_2$ . Supongamos que el líquido fluye en este tubo con aceleración que, en el caso general, puede ser variable en el tiempo e igual a

$$j = \frac{dv}{dt}.$$

Es evidente, que en un momento dado de tiempo, la velocidad  $v$  y la aceleración  $j$  son iguales para todas las secciones transversales del tubo.

Despreciaremos al principio las pérdidas de energía por rozamiento y consideraremos que la distribución de la velocidad por las secciones es uniforme.

Escogemos de todo el volumen del líquido en movimiento en el tubo un volumen cilíndrico elemental de longitud  $dl$  y superficie  $dS$  (fig. 106), y establecemos la ecuación de su movimiento del modo siguiente.

Proyectando las fuerzas de presión y la de gravedad sobre la dirección de la tangente al eje del tubo tendremos

$$pdS - \left( p + \frac{\partial p}{\partial l} dl \right) dS + \gamma dS dl \cos \alpha = \frac{\gamma}{g} dS dl \frac{dv}{dt},$$

o bien

$$-\frac{\partial p}{\partial l} dl + \gamma \cos \alpha dl = \frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} dl.$$

Puesto que

$$\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial l}$$

entonces

$$-\frac{\partial p}{\partial l} dl - \gamma \frac{\partial z}{\partial l} dl = \frac{\gamma}{g} j dl.$$

(Conviene recordar que  $p$  es no sólo la función de  $l$ , sino también de  $t$ .)

Después de integrar a lo largo del tubo para un momento determinado de tiempo, tendremos

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{j}{g} l,$$

o bien

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + h_{in.}, \quad (10.4)$$

donde

$$h_{in.} = \frac{j}{g} l.$$

La ecuación obtenida se parece a la ecuación de Bernoulli para el movimiento relativo, y el término  $h_{in.}$  se denomina también presión de inercia, pero no se debe confundir  $h_{in.}$  con  $\Delta H_{in.}$  porque tienen diferentes sentidos. La magnitud  $h_{in.}$  como se ve de la ecuación (10.4) es la diferencia de las energías específicas del líquido en las secciones 1—1 y 2—2 en el momento dado, condicionada por la aceleración (o frenado) del flujo del líquido en el tubo. En caso de aceleración, esta diferencia es positiva, es decir, la energía específica del líquido a lo largo del flujo disminuye, en caso de frenado, negativa, lo que significa el aumento de la energía específica del líquido desde la primera sección hacia la segunda.

Si existen pérdidas hidráulicas de energía en el tubo (locales y por rozamiento), éstas deben ser incluidas, por analogía con la ecuación de Bernoulli, en el miembro derecho de la ecuación (10.4), es decir,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \Sigma h + h_{in.} \quad (10.5)$$

No se debe olvidar que la ecuación (10.5) es justa para un tubo de sección constante. Si la tubería consta de varios tramos con dife-



rentes áreas de secciones ( $S_1$ ,  $S_2$ , etc.), es evidente que la presión de inercia para toda la tubería debe ser hallada como suma de las presiones de inercia para cada tramo. En este caso, las aceleraciones correspondientes se determinarán de las siguientes ecuaciones que son el resultado de la diferenciación de las ecuaciones del gasto con respecto al tiempo

$$\frac{dQ}{dt} = S_1 j_1 = S_2 j_2 = S_3 j_3 + \dots$$

etc.

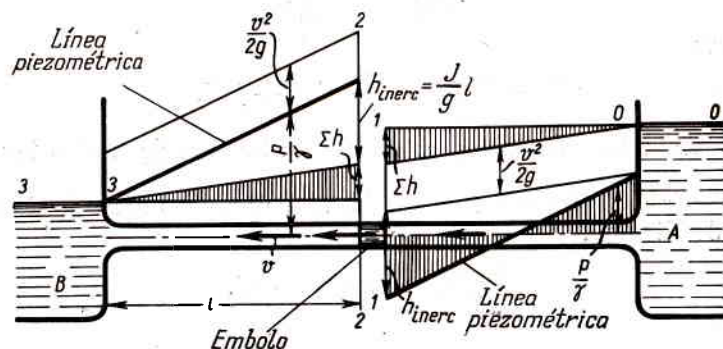


Fig. 107. Trazado de la línea piezométrica durante la corriente no estacionaria en el tubo

Además, como resulta de las consideraciones energéticas citadas anteriormente, en este caso hay que tener en cuenta las presiones dinámicas en las secciones inicial y final de la tubería.

De este modo, la ecuación de la corriente de líquido no estable entre las secciones 1-1 y  $n$ - $n$  tendrá la forma

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma h + \Sigma h_{in}. \quad (10.6)$$

La ecuación obtenida se emplea en los cálculos de los regímenes de arranque y de cambio de los sistemas hidráulicos de aviones y, particularmente, de los sistemas de suministro de combustible de los motores cohete de combustible líquido.

Para ilustrar la ecuación obtenida citemos el siguiente ejemplo. Supongamos que dentro del tubo acoplado a los recipientes A y B, se mueve hacia la izquierda un émbolo con aceleración positiva  $j$  (fig. 107). Apliquemos la ecuación (10.6) para las secciones 0-0 y 1-1 y después, para las secciones 2-2 y 3-3 y construyamos la línea piezométrica para un momento dado de tiempo; entonces tendremos

$$z_0 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{j}{g} l$$

y

$$\frac{p_2}{\gamma} = z_3 + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \frac{j}{g} l.$$

Por lo tanto, en el primer caso, la presión de inercia, sumándose con la pérdida de presión, provoca una caída aún mayor de presión junto al émbolo que en el caso de movimiento uniforme. En la sección 1-1 se forma un vacío e inclusive el líquido puede separarse del émbolo. En el segundo caso, como resultado de una suma análoga de  $h_{roz.}$  y  $h_{in.}$ , la inercia de la columna del líquido trae consigo el incremento de la presión junto al émbolo.

Si la aceleración  $j$  es negativa, es decir, si el líquido se frena, entonces en ambos la presión de inercia es negativa y, por consiguiente, compensa en cierto grado la pérdida de la presión y disminuye el vacío en el primer caso y la presión elevada en el segundo.

**Ejemplo.** Determinar la presión absoluta a la entrada de la bomba del sistema de lubricación examinado en el ejemplo del capítulo VI (véase la fig. 51), al entrar el avión en el picado con la sobrecarga negativa  $n_y = -1$  (la fuerza de inercia está dirigida hacia arriba).

**Solución.** La fuerza de inercia unitaria es igual a (véase el § 11):

$$a = (n_g - 1)g = -2g$$

y la presión de inercia

$$\Delta H_{in.} = -\frac{a}{g} z = +2z.$$

De la ecuación de Bernoulli para el movimiento relativo tenemos

$$\frac{p_1}{\gamma_m} = z + \frac{p_A}{\gamma_m} - \alpha \frac{v^2}{2g} - h_{roz.} - \Delta H_{in.} = 152 - 140 = 12 \text{ cm}$$

o bien

$$h_1 = 12 \frac{0,9}{13,6} 10 = 8 \text{ mm col Hg}$$

La presión tan baja a la entrada de la bomba es inadmisibles, por consiguiente, hay que tomar medidas para aumentar la capacidad de altura del sistema de lubricación.

## § 42. Choque hidráulico en los tubos

Se denomina *choque hidráulico* el cambio repentino de la presión que surge en los tubos al cerrar rápidamente el grifo.

Las investigaciones teóricas y experimentales del choque hidráulico fueron realizadas primeramente por N. Zhukovski. Para explicar este fenómeno hemos utilizado los conceptos principales de su obra fundamental «Sobre el choque hidráulico» editada en 1899.

El choque hidráulico en un tubo es un proceso periódico de corta duración que va acompañado por deformaciones elásticas del líquido y del tubo.

Supongamos que en el extremo de un tubo, por el cual un líquido fluye con velocidad  $v_0$ , ha sido cerrado instantáneamente el grifo



(fig. 108, a). Entonces, la velocidad de las partículas del líquido que han chocado con el grifo será nula y su energía cinética se convertirá en trabajo de deformación de las paredes del tubo y del líquido. Las paredes del tubo se dilatan y el líquido se contrae conforme aumen-

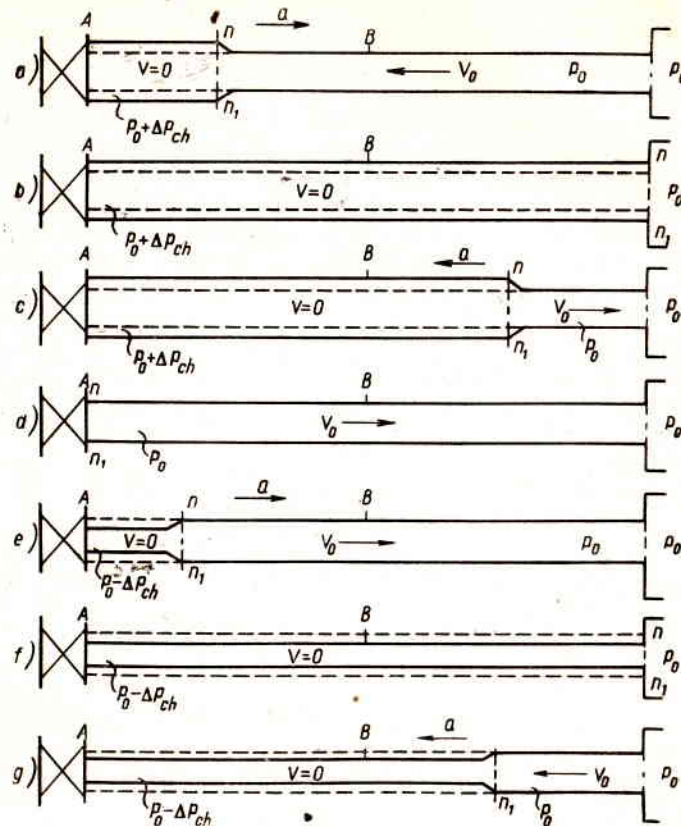


Fig. 108. Esquema del movimiento de la onda de choque en caso de un choque hidráulico

ta la presión  $\Delta p_{ch}$ .<sup>1)</sup> Las partículas frenadas junto al grifo son comprimidas por otras vecinas que también pierden su velocidad, resultando que la sección  $n - n$  se desplaza a la derecha con velocidad  $a$ , que se denomina velocidad de la onda de choque; y la zona de paso, en la cual la presión cambia en la magnitud  $\Delta p_{ch}$ , se denomina onda de choque.

<sup>1)</sup> Aquí no se puede despreciar la contractibilidad del líquido como se hace generalmente en los problemas de Hidráulica, ya que la contractibilidad reducida del líquido es precisamente la causa del surgimiento de la gran presión de choque  $\Delta p_{ch}$ .

Cuando la onda de choque llega al recipiente, el líquido quedará detenido y contraído en todo el tubo, y sus paredes, dilatadas. El aumento de la presión  $\Delta p_{ch}$  por el choque se difunde por todo el tubo (fig. 108, b).

Pero tal estado no está en equilibrio. Bajo la acción de la diferencia de presiones  $\Delta p_{ch}$ , las partículas del líquido se dirigirán del tubo al recipiente, comenzando este movimiento desde la sección inmediata al recipiente. La sección  $n - n$  se dirigirá ahora al grifo con velocidad  $a$  dejando detrás de sí la presión  $p_0$  (fig. 108, c).

El líquido y las paredes del tubo se suponen absolutamente elásticos, por eso éstos regresan al estado anterior correspondiente a la presión  $p_0$ . Todo el trabajo de deformación se convierte de nuevo en energía cinética y el líquido en el tubo adquiere la velocidad inicial  $v_0$ , pero dirigida ahora en el sentido contrario.

Con esta velocidad la columna líquida (fig. 108, d) tiende a separarse del grifo, debido a lo cual surge una onda negativa de choque  $\Delta p_{ch}$ , que corre del grifo hacia el recipiente con velocidad  $a$ , dejando detrás de sí las paredes comprimidas del tubo y el líquido ensanchado debido a la disminución de la presión  $\Delta p_{ch}$  (fig. 108, e). La energía cinética del líquido se transforma de nuevo en el trabajo de deformación, pero de signo contrario.

El estado del tubo en el momento de la llegada de la onda negativa de choque al recipiente se muestra en la fig. 108, f. Lo mismo que para el caso indicado en la fig. 108, b, éste no está en equilibrio. En la fig. 108, g se muestra el proceso de nivelación de la presión en el tubo y en el recipiente, acompañado por la formación de la velocidad  $v_0$ .

Es evidente que, tan pronto como la onda de choque  $\Delta p_{ch}$ , rebota del recipiente, alcance el grifo, ocurrirá lo mismo que ya tuvo lugar en el momento de cerrarlo. Todo el ciclo del choque hidráulico se repetirá.

En los experimentos de N. Zhukovski fueron registrados hasta 12 ciclos completos con disminución gradual de  $\Delta p_{ch}$ , debido al rozamiento y al paso de la energía al recipiente.

La característica del choque hidráulico en función del tiempo se muestra en el diagrama representado en la fig. 109.

El diagrama superior da la variación de la presión  $\Delta p_{ch}$ , que registraría el indicador instalado en el punto A inmediato al grifo (se supone que el cierre del grifo es instantáneo).

En el punto B, que se encuentra en el centro del tubo, la presión de choque aparece con un retardo de  $\frac{l}{2a}$ . Esta dura el tiempo que se necesita para que la onda de choque se desplace del punto B al recipiente y viceversa, es decir, durante el tiempo  $\frac{l}{a}$ . Después, en el punto B se establece la presión  $p_0$  (es decir,  $\Delta p_{ch} = 0$ ), la cual se conserva hasta la llegada al punto B de la onda de choque negativa



desde el grifo, lo que tiene lugar transcurrido un período de tiempo igual a  $\frac{l}{a}$ .

La magnitud de la presión de choque  $\Delta p_{ch}$ , se halla a partir de la ecuación de fuerzas vivas, según la cual, la energía cinética del líquido se convierte en el trabajo de deformación de las paredes del tubo y en

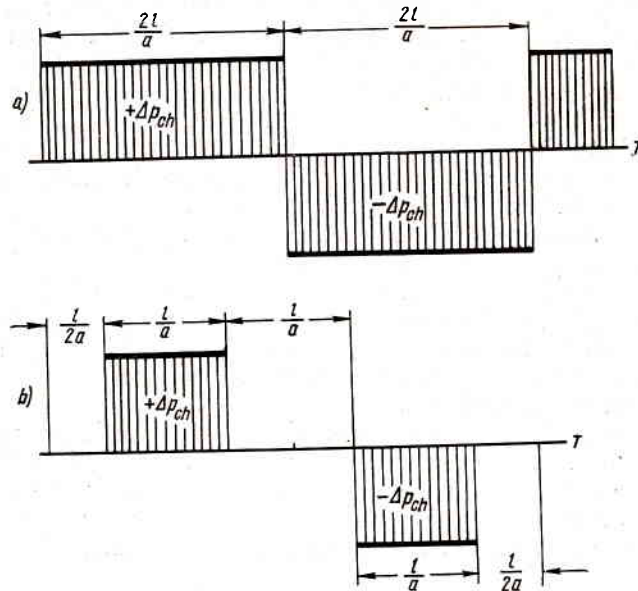


Fig. 109. Variación de la presión en función del tiempo junto al grifo y en el centro del tubo

el de la deformación del líquido. La energía cinética del líquido en el tubo con un radio  $R$  es igual a

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 l \rho v_0^2.$$

El trabajo de deformación es igual a la mitad del producto de la fuerza por la dilatación. Expresando el trabajo de deformación de las paredes del tubo como el de las fuerzas de presión en el recorrido  $\Delta R$  (fig. 110), tendremos

$$\frac{1}{2} \Delta p_{ch} \cdot 2\pi R l \Delta R.$$

Según la ley de Hooke

$$\frac{\Delta R}{R} E = \sigma, \quad (10.7)$$

donde  $\sigma$  es la tensión normal en el material de la pared del tubo, que está relacionada con la presión  $\Delta p_{ch}$ , y el espesor de la pared  $\delta$  en la

conocida ecuación

$$\sigma = \frac{\Delta p_{ch} R}{\delta}. \quad (10.8)$$

Tomando la expresión para  $\Delta R$  de (10.7) y  $\sigma$  de (10.8), tendremos el trabajo de deformación de las paredes del tubo

$$\frac{\Delta p_{ch}^2 \pi R^3 l}{\delta E}.$$

El trabajo de contracción del volumen  $W$  del líquido se puede presentar como el de las fuerzas de presión en el recorrido  $\Delta l$  (véase

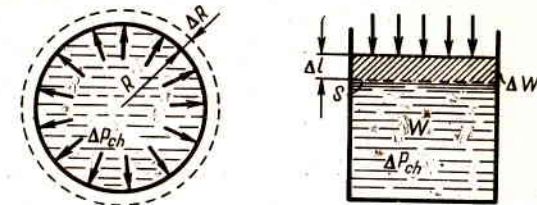


Fig. 110. Esquema de la dilatación del tubo y de la contracción del líquido la fig. 110), es decir,

$$\frac{1}{2} S \Delta p_{ch} \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p_{ch} \Delta W.$$

Semejante a la ley de Hooke para la dilatación lineal, la disminución relativa del volumen del líquido  $\frac{\Delta W}{W}$  está relacionada con la presión mediante la ecuación

$$\frac{\Delta W}{W} K = \Delta p_{ch},$$

donde  $K$  es el módulo volumétrico de elasticidad del líquido (véase § 4).

Siendo  $W$  el volumen del líquido en el tubo, obtendremos la expresión del trabajo de contracción del líquido

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p_{ch}^2 \pi R^2 l}{K}.$$

De este modo, la ecuación de las fuerzas vivas adquirirá la forma

$$\frac{1}{2} \pi R^2 l \rho v_0^2 = \frac{\pi R^3 l \Delta p_{ch}^2}{\delta E} + \frac{\pi R^2 l \Delta p_{ch}^2}{2K}.$$

Resolviéndola respecto a  $\Delta p_{ch}$ , llegaremos a la fórmula de N. Zhukovski:

$$\Delta p_{ch} = \rho v_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}}. \quad (10.9)$$



La magnitud  $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}}$  tiene las mismas dimensiones que la velocidad.

Su sentido físico se puede aclarar suponiendo que el tubo dispone de paredes absolutamente rígidas, es decir,  $E = \infty$ . Entonces de la última expresión quedará solamente  $\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ , es decir, la velocidad del sonido en un medio elástico homogéneo con densidad  $\rho$  y el módulo volumétrico de elasticidad  $K$ .

Para el agua esta velocidad es igual a 1.436 m/seg, para la gasolina, 1.116 m/seg y para lubricante, 1.400 m/seg.

Si como en nuestro caso  $E \neq \infty$ , la magnitud  $\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}}} = a$  representará la velocidad del sonido en el líquido que llena el tubo de paredes elásticas.

De la naturaleza misma de las oscilaciones sonoras se deduce que la velocidad del sonido es la de propagación de variaciones pequeñas de la densidad en el ambiente. Si la variación de la densidad es relativamente pequeña, es justa la ley de Hooke, la cual ha sido empleada para deducir la fórmula (10.9). De aquí llegamos a la conclusión de que la magnitud  $a$  debe ser precisamente la velocidad del recorrido de la onda de choque examinada en la fig. 108. Por consiguiente, la fórmula de N. Zhukovski puede ser escrita también en la forma siguiente:

$$\Delta p_{ch.} = \rho v_0 a. \quad (10.10)$$

La fórmula obtenida es justa para el así llamado cierre «instantáneo» del grifo, es decir, cuando el tiempo de cierre

$$T_{cierre} < T_0 = \frac{2l}{a}.$$

Si  $T_{cierre} > T_0$ , tiene lugar un choque hidráulico incompleto, cuando la onda de choque, rebotando del recipiente regresa al grifo antes de que éste sea cerrado por completo. En este caso, el aumento de la presión  $\Delta p_{ch.}$  es menor que en el del choque completo, y, generalmente, se considera que

$$\Delta p'_{ch.} = \frac{T_0}{T_{cierre}} \Delta p_{ch.}$$

Aplicando la fórmula (10.10) y la expresión para  $T_0$ , en lugar de la anterior, tendremos

$$\Delta p'_{ch.} = \frac{2\rho l v_0}{T_{cierre}}. \quad (10.11)$$

De este modo, la magnitud  $\Delta p_{ch.}$  depende, a diferencia de  $\Delta p$ , de la longitud del tubo y no depende de la velocidad  $a$ .

De lo expuesto anteriormente está claro que para evitar el choque

hidráulico es necesario alargar el tiempo de cierre de los grifos:  $T_{cierre}$ . Si por alguna causa esto es imposible, en las tuberías se utilizan volúmenes aéreos (acumuladores).

El volumen aéreo retarda el proceso del frenado del líquido, lo que equivale a aumentar el tiempo de cierre del grifo.

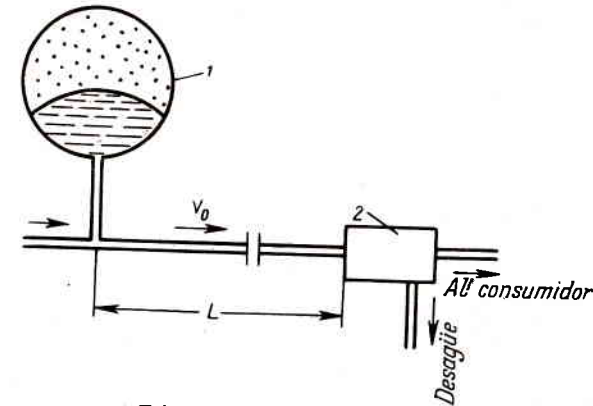


Fig. 111. Para el ejemplo:

1 — acumulador hidráulico; 2 — válvula electromagnética

**Ejemplo.** En el sistema hidráulico de los aviones la desconexión del consumidor se realiza mediante un grifo electromagnético. El grifo cierra completamente la tubería en  $T_{cierre} = 0,02$  seg.

Determinar el aumento de la presión delante del grifo al desconectar el consumidor, teniendo en cuenta los siguientes datos (fig. 111).

La longitud de la tubería desde el grifo hasta el hidroacumulador, donde la presión de choque se amortigua es  $l = 4$  m; el diámetro de la tubería, 12 mm; el espesor de su pared,  $\delta = 1$  mm; el material es acero ( $E = 2,2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>); el módulo volumétrico de elasticidad del líquido, AMF-10,  $K = 13.300$  kg/cm<sup>2</sup>; su densidad,  $\rho = 90$  kg/seg<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>; la velocidad del flujo en el tubo,  $v_0 = 4,5$  m/seg.

**Solución:** Primero se determina la velocidad de propagación de la onda de choque por la tubería llena del líquido AMF-10:

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho R}{\delta E}} = \sqrt{\frac{90}{13.300 \cdot 10^4} + \frac{2 \cdot 0,006 \cdot 90}{0,001 \cdot 2,2 \cdot 10^6}} = \frac{1}{1.170} \text{ seg/m},$$

$$a = 1.170 \text{ m/seg.}$$

La presión total de choque al cerrar instantáneamente el grifo será

$$\Delta p_{ch.} = \rho v_0 a = 90 \cdot 4,5 \cdot 1.170 = 473.000 \text{ Kg/m}^2 = 47,3 \text{ Kg/cm}^2.$$

Pero aquí tiene lugar un choque hidráulico incompleto, porque el tiempo del doble recorrido de la onda de choque es igual a

$$T_0 = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 4}{1.170} = 0,0068 \text{ seg.}$$

es decir, es menor que el tiempo del cierre completo del grifo  $T_{cierre}$ . De este modo, el aumento de la presión delante del grifo será solamente

$$\Delta p'_{ch.} = \Delta p_{ch.} \frac{T_0}{T_{cierre}} = 47,3 \frac{0,0068}{0,02} = 16,2 \text{ Kg/cm}^2.$$

Examinemos los problemas que pueden presentarse al calcular una tubería simple.



## Cálculo de tuberías

### § 43. Tubería simple

Denominaremos tubería simple una tubería de diámetro constante sin ramificaciones. El líquido, fluye por la tubería, debido a que en uno de sus extremos la energía potencial es mayor que en el otro. Este gradiente (diferencia) de niveles de energía potencial puede ser creado de diferentes modos: por medio de la diferencia de niveles del líquido, con el trabajo de la bomba o con presión de gas.

En la técnica de aviación nos enfrentamos principalmente con tuberías, en las cuales el movimiento del líquido se produce por el trabajo de una bomba. En algunos motores cohete de combustible líquido y otros dispositivos se emplea el suministro de líquido con un balón de gas, es decir, se emplea la presión del gas. El flujo del líquido por diferencia de niveles (diferencia de alturas de nivel) tiene lugar solamente en condiciones terrestres.

Los principios de cálculo de tuberías expuestos en el presente párrafo (así como en los § 45 y 46) se refieren por igual a las tres variedades indicadas del suministro de líquido, es decir, independientemente del modo de crear la diferencia de energía. Las particularidades del suministro de líquido mediante la bomba se explican en el § 47.

Supongamos que una tubería simple, situada a voluntad en el espacio (fig. 112), tenga la longitud total  $l$  y el diámetro  $d$ , y posea varias resistencias locales. En la sección inicial (1-1) tenemos la altura de nivel  $z_1$  y la presión  $p_1$ , y en la final (2-2),  $z_2$  y  $p_2$  respectivamente. La velocidad en toda la tubería es constante, gracias a que el diámetro es invariable (salvo las resistencias locales), e igual a  $v$ . Apliquemos la ecuación de Bernoulli a las secciones 1-1 y 2-2; considerando que  $\alpha_1 = \alpha_2$  y eliminando las alturas dinámicas, tendremos

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \Sigma h,$$

o bien,

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = z_2 - z_1 + \Sigma h.$$

La diferencia de alturas piezométricas que se encuentra en el miembro izquierdo de la ecuación la denominaremos presión necesaria  $H_{nec.}$ . Si esta magnitud nos es dada, la denominaremos presión disponible  $H_{disp.}$ . Como se ve de la fórmula, esta presión es igual a la altura geométrica, a la cual asciende el líquido en el proceso de su flujo por la tubería y a la suma de todas las pérdidas hidráulicas en la misma.

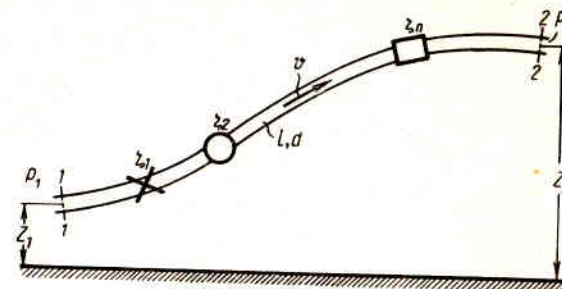


Fig. 112. Esquema de una tubería simple

Dicha suma de pérdidas se puede presentar en forma general como función del gasto, entonces

$$H_{nec.} = \Delta z + kQ^m, \quad (11.1)$$

donde el coeficiente  $k$  y el índice  $m$  tienen diferente valor en dependencia del régimen de la corriente.

Para el régimen laminar, al sustituir las resistencias locales por longitudes equivalentes según las fórmulas (6.5) y (8.19), tendremos

$$k = \frac{128\nu(l + l_{eq})}{\pi g d^4} \text{ y } m = 1. \quad (11.2)$$

Para el régimen turbulento según las fórmulas (4.17) y (4.18) expresando la velocidad por el caudal, tendremos

$$k = \left( \Sigma \xi + \lambda_t \frac{l}{d} \right) \frac{16}{2g\pi^2 d^4} \text{ y } m = 2. \quad (11.3)$$

La fórmula (11.1) conjuntamente con las expresiones (11.2) y (11.3) es la base para el cálculo de las tuberías simples. Al mismo tiempo esta fórmula es la ecuación de la característica de la tubería.

Se denomina *característica de la tubería* la gráfica de la presión necesaria en función del gasto del líquido en la tubería. Cuanto mayor es el gasto que queremos tener en la tubería, tanto mayor es la presión necesaria. Para el régimen laminar, la característica de la tubería se presenta con una línea recta (o próxima a la recta); para el turbulento, con una parábola de exponente igual a dos (siendo  $\lambda_t = \text{const}$ ) o aproximadamente a dos (si se toma en consideración la dependencia de  $\lambda_t$  del número de Re). El valor de  $\Delta z$  es positivo cuando el líquido en su movimiento por la tubería asciende de una altura menor a una mayor, y negativa, cuando la corriente fluye de arriba abajo.



En la fig. 113 se muestran las diferentes formas de características de la tubería para el régimen laminar (a) y turbulento (b). La pendiente de la característica de la tubería depende del coeficiente  $k$  y crece al aumentar la longitud de la tubería, al disminuir el diámetro,

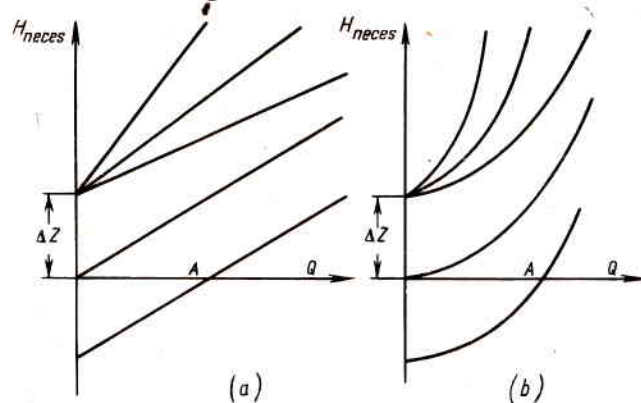


Fig. 113. Características de la tubería

así como al aumentar las resistencias hidráulicas locales en la tubería. Además, en el régimen laminar, el ángulo de inclinación de la característica cambia proporcionalmente a la viscosidad del líquido.

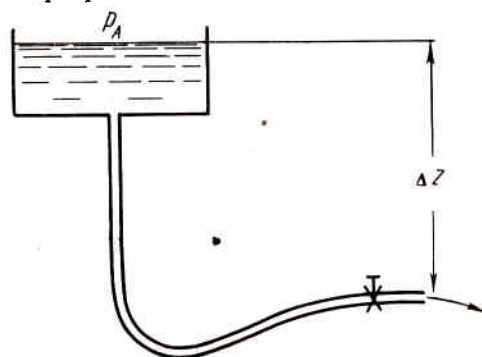


Fig. 114. Esquema de una tubería de corriente por gravedad

El punto de intersección de la característica de la tubería con el eje de abscisas (punto A) determina el gasto durante el movimiento espontáneo del líquido, es decir, sólo a cuenta de la diferencia de alturas de nivel  $\Delta Z$ . La presión necesaria en este caso es igual a cero, porque la presión en los dos extremos de la tubería es igual a la atmosférica (consideramos que la superficie libre en el recipiente superior es el principio de la tubería). Semejante tubería vamos a llamarla tubería de corriente por gravedad (fig. 114). Si al terminar la tubería de

corriente por gravedad el líquido se derrama a la atmósfera, en la ecuación para la presión necesaria (11.1) hay que añadir a las pérdidas de presión la presión dinámica.

**Problema 1.** Conociendo el gasto  $Q$ , las propiedades del líquido ( $\gamma$  y  $\nu$ ), todas las dimensiones de la tubería, así como el material y la calidad de su fabricación (rugosidad) hallar la presión necesaria  $H_{nec}$ .

El problema se resuelve en el orden siguiente. A partir del gasto y del diámetro de la tubería  $d$  se halla la velocidad de la corriente  $v$ ; con  $v$ ,  $d$  y  $\nu$  se determinan el número de Re y el régimen de la corriente. Después, por las fórmulas correspondientes o datos experimentales se calculan las resistencias locales ( $\frac{l_{eq}}{d}$  o  $\xi$  para el régimen laminar y  $\xi$  para el turbulento); por el número de Re y la rugosidad se determina  $\xi$  y, por fin, se resuelve la ecuación principal (11.1) respecto a  $H_{nec}$ .

Para el régimen laminar el cálculo de  $\lambda$  no es obligatorio; se puede determinar directamente  $k$  por la fórmula (11.2).

**Problema 2.** Conociendo la presión disponible  $H_{disp}$ , las propiedades del líquido, todas las dimensiones de la tubería, y también la rugosidad, hallar el gasto  $Q$ .

La resolución se diferencia en mucho para los regímenes laminar y turbulento. Por eso adoptamos el régimen de corriente, basándonos en la clase (viscosidad) del líquido<sup>1)</sup>:

a) en el régimen laminar, si se sustituyen las resistencias locales por longitudes equivalentes, el problema se resuelve simplemente: de la ecuación (11.1) y tomando en consideración la fórmula (11.2) se halla el gasto  $Q$ , colocando  $H_{disp}$  en lugar de  $H_{nec}$ ;

b) en el régimen turbulento el problema debe resolverse por el método de aproximaciones consecutivas (método por tanteo) o de modo gráfico.

En el primer caso tenemos una ecuación (11.1) con dos incógnitas:  $Q$  y  $\lambda_t$ . Para resolver el problema tomamos el valor del coeficiente  $\lambda_t$ , teniendo en cuenta la rugosidad. Puesto que este coeficiente varía en límites comparativamente reducidos ( $\lambda_t = 0,015 - 0,04$ ), no cometemos gran error, máxime que al determinar después  $Q$ , el coeficiente  $\lambda_t$  entra en el radicando.

Resolviendo la ecuación (11.1), tomando en consideración (11.3) respecto a  $Q$ , hallamos el gasto en la primera aproximación. Con el valor de  $Q$  hallado determinamos  $v$  y Re en la primera aproximación, y por Re, el valor ya más exacto de  $\lambda_t$ . Colocamos de nuevo el valor obtenido de  $\lambda_t$  en la misma ecuación principal y la resolvemos respecto a  $Q$ . Después de obtener el gasto en la segunda aproximación nos encontraremos con una divergencia más o menos grande con la primera aproximación. Si la divergencia es grande, continuamos el cálculo en el mismo orden. La diferencia entre cada siguiente valor  $Q$  y el anterior se hace cada vez menor.

Habitualmente son suficientes dos o tres aproximaciones para obtener la exactitud admisible.

Para resolver el mismo problema de modo gráfico se construye la característica de la tubería dada, tomando en consideración la variación de  $\lambda_t$ , es decir, se calculan  $v$ , Re y  $\lambda_t$  para diferentes valores de  $Q$ , y  $H_{nec}$ , por la fórmula (11.1). Después, trazando la curva  $H_{nec}$  según  $Q$  y conociendo la ordenada  $H_{nec} = H_{disp}$ , se halla su abscisa correspondiente, es decir,  $Q$ .

<sup>1)</sup> En el caso dado, el régimen se puede determinar comparando  $H_{disp}$  con su valor crítico  $H_{cr}$ , que se puede determinar basándose en las fórmulas (11.1) y (11.2) del modo siguiente:

$$H_{cr} = \Delta z + \frac{128\nu l Q_{cr}}{\pi g d^4} = \Delta z + \frac{32\nu l v_{cr}}{g d^2} \cdot \frac{v d}{v d} = \Delta z + \frac{32\nu^2 l}{g d^3} Re_{cr}.$$



**Problema 3.** Dados el gasto  $Q$ , la presión disponible  $H_{disp.}$ , las propiedades del líquido y todas las dimensiones de la tubería, salvo el diámetro, hallar este último.

Comenzamos a resolverlo, adoptando el régimen de corriente, basándonos en las propiedades del líquido ( $v$ )<sup>1)</sup>.

En el caso de régimen laminar el problema se resuelve fácilmente basándose en la ecuación (11.1) y tomando en cuenta (11.2), a saber:

$$d = \sqrt[4]{\frac{128v(l + l_{eq.})Q}{\pi g(H - \Delta z)}} \quad (11.4)$$

Después de determinar  $d$ , elegimos el mayor diámetro más próximo y según la misma ecuación precisamos la magnitud de la presión con  $Q$  dado y al contrario.

Para el régimen turbulento, la solución de la ecuación (11.1), tomando en consideración (11.3) respecto a  $d$ , se obtiene mejor del modo siguiente: adoptamos varios valores standard de  $d$  y calculamos los valores de  $H_{nec.}$  para el  $Q$  dado, después construimos la gráfica de  $H_{nec.}$  en función de  $d$  y, según el  $H_{disp.}$  dado, determinamos por la curva el  $d$ , elegimos el mayor diámetro standard más próximo y precisamos  $H_{nec.}$

#### § 44. Sifón

Se denomina *sifón* a una tubería simple, una parte de la cual se encuentra encima del recipiente que la alimenta (fig. 115). El líquido fluye por el sifón debido a la diferencia de niveles  $H$ , elevándose, primeramente, el líquido a la altura  $H_1$  de la superficie libre con presión atmosférica, y descendiendo después la altura  $H_2$ .

La particularidad de esta tubería consiste en que la presión del líquido en toda su línea ascendente y en una parte de la descendente es menor que la atmosférica.

Para que el sifón comience a verter el líquido, es necesario llenar con éste todo su volumen. Si en calidad de sifón se emplea una manguera de dimensiones reducidas, el llenado se efectúa fácilmente, sumergiéndola previamente en el líquido o succionando el aire por su extremo inferior.

Si el sifón está hecho en forma de una tubería metálica estacionaria, es necesario colocar un grifo en su parte superior para la succión del aire, lo que se puede realizar mediante cualquier bomba volumétrica (capítulo XIII) o un eyector (véase el § 18).

Apliquemos la ecuación de Bernoulli a las secciones 0—0 y 2—2 (véase la fig. 115), considerando las velocidades iguales a cero y las presiones a la atmosférica; tendremos

$$z_1 = z_2 + \Sigma h,$$

o bien

$$\Delta z = kQ^m = H.$$

<sup>1)</sup> El régimen de corriente se puede determinar comparando  $H_{disp.}$  con  $H_{cr.}$ , el cual dado  $Q$  es igual a

$$H_{cr.} = \Delta z + \frac{128v_lQ}{\pi g d^4} \cdot \frac{2\pi^4 v^4 Q^3}{2\pi^4 v^4 Q^3} = \Delta z + \frac{\pi^3 v^5 l R e^4_{cr.}}{2gQ^3}.$$

De este modo, el gasto a través del sifón se determina por la diferencia de niveles  $H$  y la resistencia de la tubería, pero no depende de la altura  $H_1$ . Sin embargo, esto es justo solamente hasta ciertos límites. Con el aumento de la altura,  $H_1$ , disminuye la presión absoluta en la sección superior del sifón 1—1 ( $p_1$ ). Cuando esta presión se hace igual a la presión del vapor saturado, comienza la cavitación y el gasto disminuye, formándose acumulaciones de vapor (tapones de vapor) y cesando el derrame de líquido.

Por lo tanto, al construir el sifón hay que prever que la presión en su punto superior ( $p_1$ ) no sea demasiado pequeña. Si se conoce el gasto de líquido a través del sifón y todas las dimensiones, la presión absoluta  $p_1$  puede hallarse por la ecuación de Bernoulli para las secciones 0—0 y 1—1, que tiene la siguiente forma

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g} + \Sigma h_{0-1}.$$

Pero, si se conoce la presión mínima tolerable  $p_1$ , entonces, conocido el gasto, de esta misma ecuación se puede hallar la altura máxima tolerable  $H_1$ .

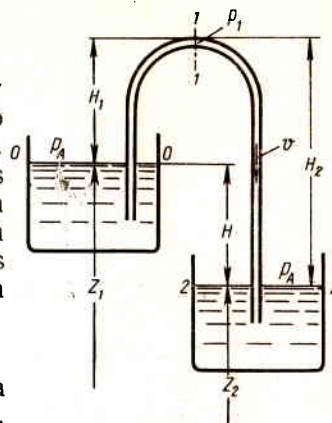


Fig. 115. Esquema de una tubería de sifón

#### § 45. Acoplamiento de tubos en serie y en paralelo

Tomemos 3 tubos de diferente longitud, distinto diámetro y con diversas resistencias locales y acoplémoslos en serie (fig. 116).

Es absolutamente evidente que, al suministrar el líquido por semejante tubería, el gasto en todos los tubos acoplados en serie será idéntico y la pérdida total de presión entre los puntos  $M$  y  $N$  es igual a la suma de pérdidas de presión en todos los tubos acoplados en serie, es

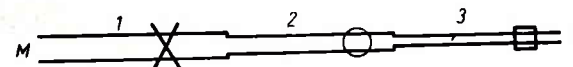


Fig. 116. Acoplamiento de tubos en serie

decir, tenemos las siguientes ecuaciones principales:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q_3 = Q; \\ \Sigma h_{M-N} &= \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Estas ecuaciones determinan la regla de formación de las características de los tubos acoplados en serie.

Supongamos que son dadas (o nosotros mismos las hemos formado) las características de tres tuberías (fig. 117).



Para trazar la característica de todo el acoplamiento en serie  $M - N$  debemos, de acuerdo con (11.5), realizar la suma de las pérdidas de presión para gastos iguales, es decir, sumar las ordenadas de las tres curvas, siendo invariables las abscisas (véase la fig. 117).

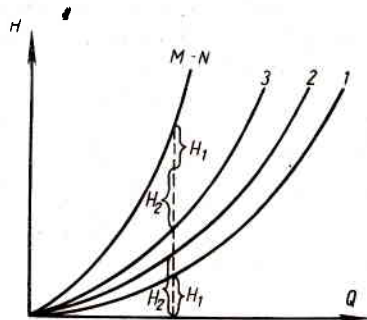


Fig. 117. Trazado de la característica de acoplamiento de tubos en serie

Puesto que, en el caso más común que se considera, las velocidades son distintas en el comienzo ( $M$ ) y en el final ( $N$ ) de la tubería, la expresión de la presión necesaria para toda la tubería  $M - N$ ,

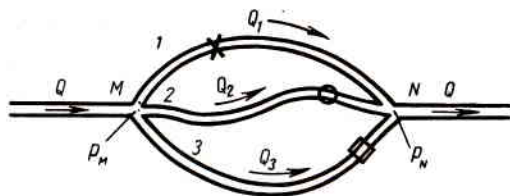


Fig. 118. Acoplamiento de tubos en paralelo

a diferencia de la fórmula (11.1) debe contener la resta de presiones dinámicas en el comienzo y final de la tubería, o sea

$$H_{\text{nec.}} = z_M - z_N + \frac{\alpha_N v_N^2 - \alpha_M v_M^2}{2g} + \Sigma h_{M-N} = \Delta z + CQ^2 + kQ^m, \quad (11.6)$$

donde

$$C = \frac{1}{2g} \left( \frac{\alpha_N}{S_N^3} - \frac{\alpha_M}{S_M^3} \right).$$

Consideremos ahora el acoplamiento en paralelo de varias tuberías diferentes entre los puntos  $M$  y  $N$  (fig. 118).

Para simplificar, supongamos que estas tuberías se hallan en un plano horizontal.

Designemos: la presión en los puntos  $M$  y  $N$ , con  $p_M$  y  $p_N$  respectivamente; el gasto en el conducto principal (es decir, antes de la ramificación y después de su unión), con  $Q$ , y en las tuberías paralelas, con  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ ; la suma de las pérdidas de presión en cada tubería, con  $\Sigma h_1$ ,  $\Sigma h_2$  y  $\Sigma h_3$ .

Es evidente que

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (11.7)$$

Las pérdidas de presión en cada tubería entre los puntos  $M$  y  $N$ , serán

$$\Sigma h_1 = \frac{p_M - p_N}{\gamma};$$

$$\Sigma h_2 = \frac{p_M - p_N}{\gamma};$$

$$\Sigma h_3 = \frac{p_M - p_N}{\gamma}.$$

De aquí deducimos la siguiente importante conclusión:

$$\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3, \quad (11.8)$$

es decir, las pérdidas de presión en las tuberías paralelas son iguales entre sí.

Estas pérdidas pueden ser expresadas por los gastos respectivos en el caso general del modo siguiente:

$$\Sigma h_1 = k_1 Q_1^m;$$

$$\Sigma h_2 = k_2 Q_2^m;$$

$$\Sigma h_3 = k_3 Q_3^m;$$

donde los coeficientes  $k$  y el índice  $m$  se determinan en función del régimen de la corriente con las fórmulas (11.2) o (11.3).

Por consiguiente, como complemento a la ecuación (11.7) obtenemos, basándonos en las igualdades (11.8), dos ecuaciones más;

$$k_1 Q_1^m = k_2 Q_2^m; \quad (11.9)$$

$$k_2 Q_2^m = k_3 Q_3^m. \quad (11.10)$$

El sistema de ecuaciones (11.7), (11.9) y (11.10) permite resolver, por ejemplo, el siguiente problema típico: dados el gasto en el conductor principal  $Q$  y todas las dimensiones de las tuberías, determinar los gastos en las tuberías paralelas  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ .

Aplicando la ecuación (11.7) y la igualdad (11.8), siempre podemos componer tantas ecuaciones como tuberías paralelas haya entre los puntos  $M$  y  $N$ .

Al calcular los sistemas de combustible de aviones a menudo hace falta resolver también el siguiente problema: dados el gasto total y las longitudes de las tuberías paralelas, determinar sus diámetros, partiendo de la condición de asegurar gastos determinados en cada una de éstas. La solución de este problema se examina en el ejemplo 2.

De las relaciones (11.7) y (11.8) se deriva la siguiente importante regla: para hacer la característica del acoplamiento de varias tuberías en paralelo hay que sumar las abscisas (gastos) de las características de estas tuberías, siendo iguales las ordenadas (presiones). El ejemplo de tal trazado se muestra en la fig. 119.



Es evidente, que las relaciones expuestas y las reglas para las tuberías paralelas son justas también para el caso cuando las tuberías 1, 2, 3, etc. (véase la fig. 118) no convergen en un punto  $N$ , sino que suministran el líquido a distintos lugares, pero con presiones y alturas de nivel de las secciones finales iguales. Si la última condición no se

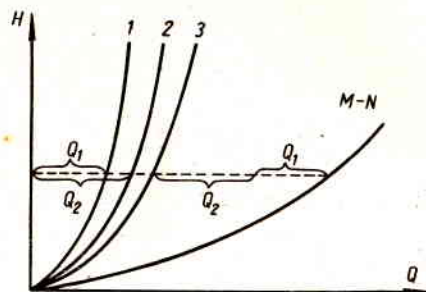


Fig. 119. Trazado de la característica de acoplamiento de tubos en paralelo

observa, las tuberías que se examinan no pueden ser consideradas paralelas, sino que es necesario incluirlas en la clase de tuberías ramificadas (véase el § 46).

#### § 46. Cálculo de tuberías ramificadas y complejas

Denominaremos tubería ramificada a un conjunto de varios tubos con una sección común: el lugar de ramificación o convergencia de los mismos. Tales tuberías se encuentran generalmente en los sistemas

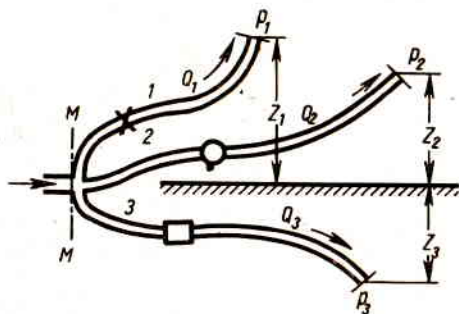


Fig. 120. Tubería ramificada

de combustión de los aviones (principales y de carga) y en los sistemas de transmisión hidráulica, así como en los sistemas estacionarios de suministro de combustible en los aeródromos.

Supongamos que la tubería principal tiene ramificación en la sección  $M - M$ , de la cual parten, por ejemplo, tres tubos (primero, segundo y tercero) de diversas dimensiones y con distintas resistencias locales (fig. 120). Supongamos que las alturas de nivel de las seccio-

nes finales ( $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_3$ ) y las presiones en ellas ( $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ ) sean también diferentes. Hallemos la relación entre la presión en la sección  $M - M$  ( $p_M$ ) y los gastos en los tubos ( $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ ), considerando que la dirección de la corriente en los tubos está dada (véanse las flechas) <sup>1)</sup>

Lo mismo que para tuberías paralelas tenemos

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli para la sección  $M - M$  y para la sección final de la primera tubería, por ejemplo, tendremos (despreciando la diferencia de alturas dinámicas)

$$\frac{p_M}{\gamma} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \Sigma h_1.$$

Designando la suma de los dos primeros términos en el miembro de la derecha de la ecuación con  $z'_1$  y expresando el otro término por el gasto (como se ha hecho más arriba), tendremos

$$\frac{p_M}{\gamma} = z'_1 + k_1 Q_1^m.$$

De modo análogo se puede escribir para los otros dos tubos

$$\frac{p_M}{\gamma} = z'_2 + k_2 Q_2^m,$$

$$\frac{p_M}{\gamma} = z'_3 + k_3 Q_3^m.$$

Así obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $p_M$ . Es cómodo verificar la solución de modo gráfico. Para eso trazamos la característica de cada una de las tuberías como la función  $\frac{p_M}{\gamma}$  de  $Q$ , según las ecuaciones citadas más arriba, y después las sumamos lo mismo que las características de los tubos acoplados en paralelo, es decir, sumando las abscisas ( $Q$ ), siendo invariables las ordenadas ( $H = \frac{p_M}{\gamma}$ ) (fig. 121). La curva quebrada obtenida representa la característica de toda la tubería ramificada, que permite determinar los valores de los gastos según la presión  $p_M$  y viceversa.

Si la dirección de los flujos en los tubos es inversa, es decir, de las secciones 1, 2 y 3 hacia la  $M - M$  (véase la fig. 120), las pérdidas de presión en las ecuaciones anteriores cambian de signo y, por consiguiente, al construir las curvas se trazan hacia abajo.

Se denomina tubería compleja la que tiene una o varias ramificaciones y, por consiguiente, está compuesta de tuberías de tramos acoplados en serie y en paralelo o de tuberías ramificadas.

El cálculo de las tuberías complejas, tanto de corriente por gravedad, como alimentadas por bomba se realiza generalmente por método gráfico y analítico, es decir, utilizando las características.

<sup>1)</sup> En los sistemas de avión la invariabilidad de la dirección de los flujos se asegura instalando válvulas de retención (válvulas cheque).



El cálculo y el trazado de la característica de una tubería compleja se efectúa del modo siguiente: la tubería compleja se divide en varias simples. Se hace el cálculo de cada una de éstas y se construyen sus características como se ha descrito anteriormente. Después se suman las características de los tramos acoplados en paralelo o de los elementos de la tubería ramificada, según las reglas expuestas en el § 45. De esta manera se obtiene la característica del acoplamiento en paralelo de la tubería (una o varias) o de la tubería ramificada. Luego la

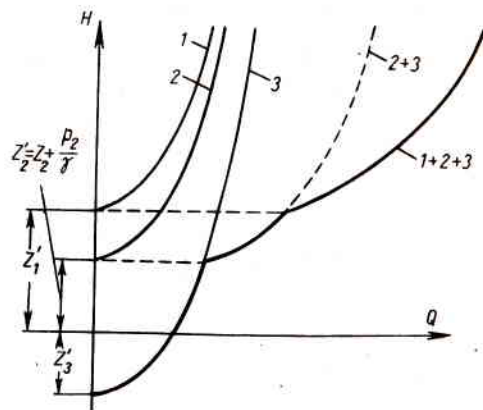


Fig. 121. Trazado de la característica de una tubería ramificada

característica obtenida se suma con la de los tramos acoplados en serie de acuerdo con las fórmulas (11.5).

Guiándose por esta regla, se puede construir la característica de cualquier tubería compleja, tanto para el régimen turbulento de la corriente, como para el laminar.

Los ejemplos del trazado de las características de las tuberías complejas están expuestos al final del capítulo.

#### § 47. Tubería con suministro de líquido por bomba

Anteriormente hemos considerado de hecho sólo algunos tramos de tuberías simples y complejas, pero no todo el sistema de suministro del líquido (excepto el sistema más simple de corriente por gravedad), y se ha indicado que en la técnica de aviación el método principal de suministrar el líquido es el forzado, mediante una bomba. Examinemos el trabajo conjunto de la tubería y de la bomba y el principio para calcular la tubería con suministro del líquido por bomba.

La tubería con suministro por bomba puede ser abierta, en la cual el líquido se bombea de un lugar a otro, o cerrada (anular), donde circula cierta cantidad constante de líquido.

Estudiemos primero la tubería abierta (fig. 122), en la cual la bomba trasvasa el líquido del recipiente inferior, a presión  $p_0$ , a otra cámara, la de combustión del motor, a presión  $p_3$ , o a otro recipiente.

La altura del eje de la bomba respecto al nivel inferior ( $H_1$ ) se denomina altura geométrica de aspiración, y la tubería, por la cual fluye el líquido a la bomba, tubería de aspiración o línea de aspiración. La altura de la sección final de la tubería o del nivel superior del líquido ( $H_2$ ) se denomina altura geométrica de expulsión, y la tubería, por la cual fluye el líquido de la bomba, tubería de expulsión o línea de expulsión.

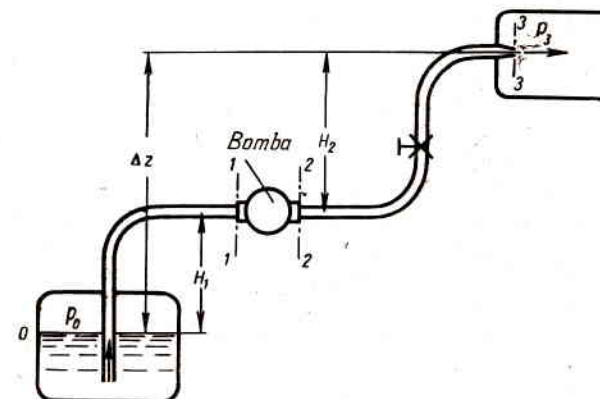


Fig. 122. Esquema de una tubería con suministro por bomba

Aplicaremos la ecuación de Bernoulli para el movimiento del líquido por la tubería de aspiración, es decir, para las secciones 0—0 y 1—1; tendremos

$$\frac{p_0}{\gamma} = H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + \Sigma h_{0-1}. \quad (11.11)$$

La ecuación anotada muestra que el proceso de aspiración (ascenso del líquido a la altura  $H_1$ ), la comunicación al líquido de la energía cinética y la superación de todas las resistencias hidráulicas, tiene lugar aprovechando (con ayuda de la bomba) la presión  $p_0$ . Puesto que esta presión generalmente suele ser bastante limitada, hay que gastarla sin exceso, es decir, que antes de entrar en la bomba todavía quede cierta reserva de la presión  $p_1$ , necesaria ésta para que la bomba trabaje normalmente, sin cavitación. Por lo tanto, el cálculo de las tuberías de aspiración debe ser particularmente minucioso y preciso.

La ecuación (11.11) es la principal para el cálculo de las tuberías de aspiración.

Son posibles los siguientes problemas de cálculo de la tubería de aspiración.

1. Dadas todas las dimensiones y el gasto, hallar la presión absoluta a la entrada de la bomba.



La solución de dicho problema representa un cálculo de control de una tubería de aspiración. La presión absoluta  $p_1$  hallada de la ecuación (11.11) se compara con la mínima tolerable para el caso dado.

2. Dada la presión absoluta mínima tolerable a la entrada de la bomba  $p_{1 \text{ mín}}$ , hallar una de las siguientes magnitudes máximas tolerables:  $H_1 \text{ máx}$ ,  $Q_{\text{máx}}$ ,  $d_{\text{mín}}$  o  $p_{0 \text{ mín}}$ .

La determinación de la última magnitud tiene importancia sustancial para los sistemas hidráulicos de aviones, para los cuales

$$p_0 = p_A + \Delta p.$$

Aquí  $\Delta p$  es el exceso sobre la presión atmosférica condicionado por la sobrealimentación o la presión del gas inerte. Por la magnitud de  $p_{0 \text{ mín}}$  se determina la presión atmosférica mínima tolerable  $p_{A \text{ mín}}$ , y después, por la tabla de la atmósfera normal se halla la altura máxima tolerable de vuelo del avión con el sistema dado, es decir, la capacidad de altura del sistema.

El incremento de la presión  $p_0$  hace aumentar la presión en toda la tubería de aspiración, y por consiguiente, aumenta la capacidad de altura del sistema. Sin embargo, no se puede admitir gran presión en el recipiente de alimentación, pues habría que fabricarlo más sólido y, por lo tanto, más pesado. Por eso, generalmente, se emplea otro método para aumentar la capacidad de altura de los sistemas hidráulicos de aviones. Para esto, en el comienzo de la tubería de aspiración se instala una bomba adicional (bomba de alimentación), que aumenta la presión en la línea de aspiración e impide que surja la cavitación a la entrada de la bomba principal.

Aplicando la ecuación de Bernoulli para el movimiento del líquido por la tubería de expulsión, es decir, para las secciones 2—2 y 3—3, tenemos

$$\frac{p_2}{\gamma} + \alpha \frac{v_2^2}{2g} = H_2 + \frac{p_3}{\gamma} + \alpha \frac{v_3^2}{2g} + \Sigma h_{2-3}. \quad (11.12)$$

Si la tubería de expulsión termina en un recipiente, la presión dinámica en el miembro derecho de la ecuación (11.12) será nula, pero hay que tomar en cuenta la pérdida de presión por ensanchamiento.

El miembro izquierdo de la ecuación (11.12) representa la energía específica del líquido a la salida de la bomba.

La energía específica del líquido a la entrada de la bomba puede ser hallada de la ecuación (11.11).

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} - H_1 - \Sigma h_{0-1}.$$

Ahora hallemos el incremento de la energía específica del líquido en la bomba, es decir, determinemos la que adquiere cada kilogramo del líquido al pasar por la bomba. Esta energía la comunica al líquido la bomba, por eso se llama presión creada por la bomba y se designa

con  $H_{\text{bomba}}$ . Para hallar  $H_{\text{bomba}}$  restamos la última ecuación de la (11.12),

$$H_{\text{bomba}} = \left( \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right) = \\ = H_1 + H_2 + \frac{p_3 - p_0}{\gamma} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g} + \Sigma h_{0-1} + \Sigma h_{2-3}$$

o bien

$$H_{\text{bomba}} = \Delta z + \frac{p_3 - p_0}{\gamma} + CQ^2 + kQ^m, \quad (11.13)$$

donde  $\Delta z$  es la altura geométrica total de ascenso del líquido (véase la fig. 122);

$$CQ^2 = \alpha_3 \frac{v_3^2}{2g};$$

$kQ^m$  es la suma de pérdidas hidráulicas en las tuberías aspirante y de expulsión.

Si sumamos a la diferencia real de niveles  $\Delta z$  la de alturas piezométricas  $\frac{p_0 - p_3}{\gamma}$ , entonces ésta se podría considerar como una diferencia de niveles aumentada y nos dará

$$\Delta z^1 = \Delta z + \frac{p_3 - p_0}{\gamma},$$

y la fórmula (11.13) adquiere la forma:

$$H_{\text{bomba}} = \Delta z^1 CQ^2 + kQ^m.$$

Comparemos la expresión obtenida (11.13) con la fórmula para la presión necesaria (11.6). Es evidente que

$$H_{\text{bomba}} = H_{\text{nec}}. \quad (11.14)$$

Esta igualdad se puede extender a todos los casos de trabajo estable de la bomba, acoplada a la tubería, y formularla como regla siguiente: si en la tubería la corriente es estable, la bomba desarrolla una presión igual a la necesaria. Sólo con esta condición es posible el régimen estable de trabajo de la bomba. Dicha condición se cumple, como regla, automáticamente.

Sobre la igualdad (11.14) se funda el método de cálculo de las tuberías alimentadas por bomba, el cual consiste en el trazado en la misma escala y en la misma gráfica de dos curvas: la característica de la tubería  $H_{\text{nec}} = f_1(Q)$  y la de la bomba  $H_{\text{bomba}} = f_2(Q)$ , y en la determinación del punto de su intersección (fig. 123).

A continuación, en el capítulo de las bombas se expondrán muy detalladamente sus características. Pero ahora, anticipándonos por necesidad, expresaremos sólo la definición: la característica de la bomba es función de la presión creada por ésta de su suministro (gasto), siendo constante el número de revoluciones.

En el punto de intersección de las características de la tubería y de la bomba tiene lugar la igualdad entre la presión necesaria y la creada



por la bomba, es decir, la igualdad (11.14). Este punto se denomina punto de trabajo, porque siempre se cumple el régimen de trabajo de la bomba que corresponde a este punto.

Para obtener otro punto de trabajo hay que cambiar el grado de abertura de la válvula de regulación (grifo, compuerta), o sea modificar la característica de la tubería, o bien variar el número de revoluciones de la bomba, sobre lo cual se tratará más detalladamente a continuación.

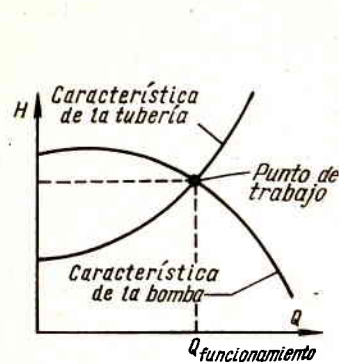


Fig. 123. Determinación gráfica del punto de trabajo

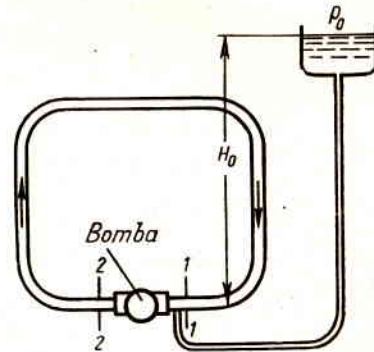


Fig. 124. Esquema de una tubería cerrada

Sin embargo, hay que tener en cuenta, que el método indicado de cálculo para determinar el punto de trabajo es aplicable sólo en el caso cuando el número de revoluciones del mando de la bomba no depende de la potencia que ésta consume, es decir, de la carga en el árbol de la bomba. Esto se observa, por ejemplo, al acoplar la bomba a un motor eléctrico de corriente alterna o a un motor de aviación cuya potencia es muchas veces mayor que la de la bomba.

Si la bomba se hace girar por cualquier otro motor de combustión interna o por una turbina especial, cuyas potencias dependen de la carga en el árbol de la bomba, el cálculo se efectúa de otro modo. En este caso hace falta trazar curvas de las potencias necesarias y disponibles según los números de revoluciones, y por el punto de su intersección determinar el número de revoluciones de trabajo y la potencia.

Para la tubería cerrada (fig. 124), la altura geométrica de ascenso del líquido es igual a cero ( $\Delta z = 0$ ), por consiguiente, si  $v_1 = v_2$

$$H_{\text{nec.}} = \Sigma h = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = H_{\text{bomba}},$$

es decir, la presión necesaria y la creada por la bomba son iguales.

Hay que tener en cuenta, que la tubería cerrada debe disponer obligatoriamente de un depósito de ampliación o de compensación unido mediante un tubo a una de las secciones de la tubería, con más frecuencia, a la de la entrada en la bomba donde la presión es mínima.

Sin este depósito, la presión absoluta en el interior de la tubería cerrada sería indeterminada y también inconstante, debido a las oscilaciones de la temperatura y a las fugas a través de partes no ajustadas.

Con el depósito de compensación, unido a la tubería, como se muestra en la fig. 124, la presión a la entrada de la bomba se hace determinada e igual a

$$p_1 = p_0 + H_0 \gamma.$$

Por el valor de  $p_1$  se puede calcular la presión en cualquier sección de la tubería cerrada. Si la presión en el depósito  $p_0$  cambia en una

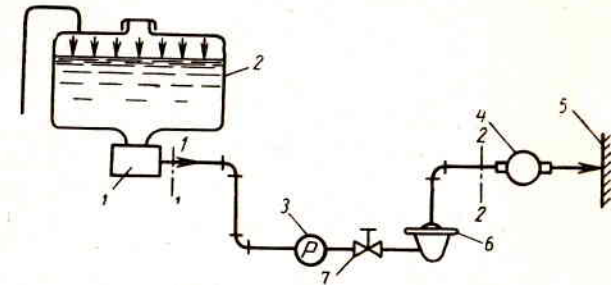


Fig. 125. Para el ejemplo 1:

1 — bomba de alimentación; 2 — depósito de combustible; 3 — captador del fluidómetro; 4 — bomba de combustible; 5 — motor; 6 — filtro; 7 — válvula de cierre

u otra magnitud, en todos los puntos del sistema dado la presión variará en la misma magnitud. Por consiguiente, el principio de Pascal sobre la transmisión de la presión en un líquido inmóvil (véase el § 6) es justo también para el caso dado. El depósito puede ser incluido también en la tubería cerrada, como se muestra en la fig. 149.

**Ejemplo 1.** Determinar la presión necesaria a la salida de la bomba de alimentación para suministrar 1.200 kg/hora de combustible T-1 a un avión desde el depósito de combustible hasta la bomba de combustible en el motor, si la longitud de la tubería de duraluminio es  $l = 5$  m; su diámetro,  $d = 15$  mm; la presión necesaria a la entrada de la bomba de combustible,  $p_2 = 1,3$  kg/cm<sup>2</sup>; el coeficiente de viscosidad del keroseno,  $\nu = 0,045$  cm<sup>2</sup>/seg; su peso específico,  $\gamma_k = 820$  kg/m<sup>3</sup>. Las resistencias locales incluidas en la tubería se muestran en la fig. 125. La altura de la columna del líquido en el depósito no se toma en cuenta.

**Solución:** 1. La velocidad de la corriente en la tubería es

$$v = \frac{4G}{3,600\pi d^2 \gamma_k} = \frac{4 \cdot 1,200 \cdot 10^3}{3,600 \cdot 3,14 \cdot 1,25 \cdot 0,82} = 240 \text{ cm/seg.}$$

2. El número de Reynolds

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{240 \cdot 1,5}{0,045} = 8.000.$$

3. El coeficiente de resistencia de rozamiento  $\lambda_{\text{roz.}}$  lo determinamos por la fórmula de Konakov,  $\lambda_{\text{roz.}} = 0,0328$ .



4. Los valores de los coeficientes de resistencia del filtro, de la válvula de cierre, del captador del fluidómetro, de los codos standard los tomamos de la tabla 2 (capítulo IX)

$$\zeta_f = 2; \quad \zeta_{ll} = 1,5; \quad \zeta_{fl} = 7; \quad \zeta_{codo} = 1,2.$$

5. El valor de la pérdida de presión en la tubería desde la bomba de alimentación hasta la de combustible lo calculamos por la fórmula

$$\Sigma p_{ta} = \gamma_h \left( \lambda_t \frac{l}{d} + 3\zeta_{codo} + \zeta_{fl} + \zeta_{ll} + \zeta_f \right) \frac{v^2}{2g} =$$

$$= 820 \left( 0,0328 \frac{500}{1,5} + 3 \cdot 1,2 + 7 + 1,5 + 2 \right) \frac{2,4^2}{2 \cdot 9,81} = 6000 \text{ kg/m}^2 = 0,6 \text{ kg/cm}^2.$$

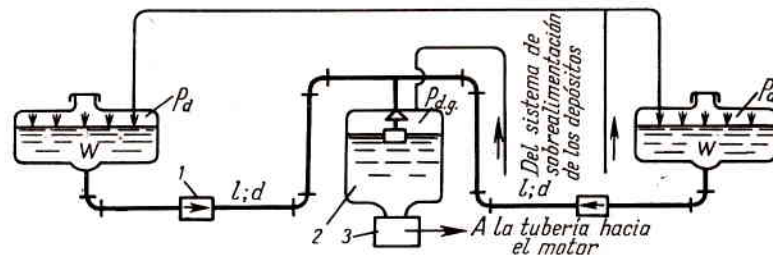


Fig. 126. Para el ejemplo 2:

1 — válvula de retención; 2 — depósito de gasto; 3 — bomba de alimentación

6. De aquí que la presión necesaria a la salida de la bomba de alimentación es igual a

$$p_1 = p_2 + \Sigma p_{tub.} = 1,3 + 0,6 = 1,9 \text{ kg/cm}^2$$

**Ejemplo 2.** Al depósito de gasto de avión (fig. 126) se suministra el combustible T—1 de dos tanques desprendibles, a cuenta de la sobrepresión en éstos en comparación con la presión en el depósito de gasto

$$\Delta p = p_{dep.} - p_{d. g.} = 0,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Determinar el diámetro de las tuberías  $d$ , teniendo en cuenta que el vaciado de los tanques desprendibles debe terminar simultáneamente, siendo el gasto total del combustible  $G = 1.500 \text{ kg/hora}$ . El volumen de cada tanque es  $W = 450 \text{ l}$ . Las tuberías tienen una longitud de  $l = 7 \text{ m}$  y están hechas de tubos de duraluminio. El coeficiente de viscosidad del keroseno  $\nu = 0,045 \text{ cm}^2/\text{seg}$ ,  $\gamma_h = 830 \text{ kg/cm}^3$ . Las alturas de las columnas del líquido en los tanques no se toman en cuenta.

**Solución.** 1. El tiempo del trabajo del motor hasta gastar completamente el keroseno de los tanques desprendibles es igual a

$$T = \frac{2W\gamma_h}{G} = \frac{2 \cdot 450 \cdot 0,83}{1500} = 0,5 \text{ hora.}$$

2. El gasto del combustible de cada tanque lo determinamos por la expresión

$$Q = \frac{W}{T} = \frac{450}{0,5} = 900 \text{ lit./hora} = 0,25 \text{ lit./ceg.}$$

Se adoptan diferentes valores de los diámetros:  $d = 12, 14, 16$  y  $18 \text{ mm}$ .

4. Los valores de los coeficientes de resistencia a la entrada de la tubería  $\zeta_{ent.}$ , de la válvula de retención  $\zeta_{v. r.}$ , del codo  $\zeta_c$ , de la unión en T  $\zeta_u$  y a la salida de la tubería  $\zeta_{sal.}$  los tomamos de la tabla 2. El coeficiente  $\zeta_{roz.}$  lo calculamos según Konakov para cada  $d$ , determinando previamente el número de Re.

5. Determinamos la magnitud de la presión necesaria  $H_{nec.}$  para cada  $d$  por la fórmula

$$H_{nec.} = \left( \zeta_{ent.} + \zeta_{v. r.} + 3\zeta_c + \zeta_u + \zeta_{sal.} + \lambda_{roz.} \frac{l}{d} \right) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4}$$

y construimos la gráfica  $H_{nec.} = f(d)$  (fig. 127).

6. Por la presión disponible, hallada dividiendo  $\Delta p$  por  $\gamma_h$ , según la gráfica, determinamos el diámetro necesario, que resulta igual a  $d = 15,7 \text{ mm}$ .

Escogemos el diámetro standard de las tuberías  $d = 16 \text{ mm}$ , el cual asegurará el gasto necesario en el vaciado simultáneo del combustible de los tanques.

Si las longitudes de las tuberías fuesen diferentes, sus diámetros, para la condición dada, se obtendrían también diferentes, y, para cada tubería, haría falta trazar su curva  $H_{nec.} = f(d)$ .

**Ejemplo 3.** Si la carga con combustible bajo presión del avión es centralizada, el llenado de todos los depósitos debe realizarse y terminar simultáneamente. El esquema de principio de la carga centralizada se muestra en la fig. 128.

Supongamos que todos los depósitos están dispuestos en un plano horizontal tal que se encuentra más arriba de la bomba del abastecedor de combustible con un valor  $h_d$ . La elevación de la tubería principal A—B sobre el nivel de la bomba es igual a  $h_A$ . La característica de la bomba del abastecedor del combustible, la longitud  $l_m$  y el diámetro  $d_m$  de la manguera surtidora, así como las longitudes de todas las tuberías y los volúmenes de los depósitos están dados.

Despreciando las alturas de las columnas del líquido en los depósitos y las sobrepresiones en éstos, resolver los siguientes problemas con los cuales nos encontramos a menudo en la práctica:

I. Determinar la duración del abastecimiento  $T$ , si son dados los diámetros de las tuberías.

II. Hallar los diámetros necesarios de las tuberías:  $d_M, d_1, d_2$  y  $d_3$ , partiendo de la condición del abastecimiento simultáneo de todos los depósitos durante el tiempo  $T$ .

1. El problema se resuelve de modo gráfico y analítico.

1. Construimos la característica de la manguera surtidora desde la bomba hasta el punto A, comienzo de la tubería principal.

2. Trazamos la característica de la tubería principal (desde el punto A hasta el punto B).

3. Sumamos ambas características según las reglas de adición de las características de las tuberías acopladas en serie (fig. 129).

4. Construimos las características de las tuberías desde el punto de ramificación B hasta los depósitos correspondientes.

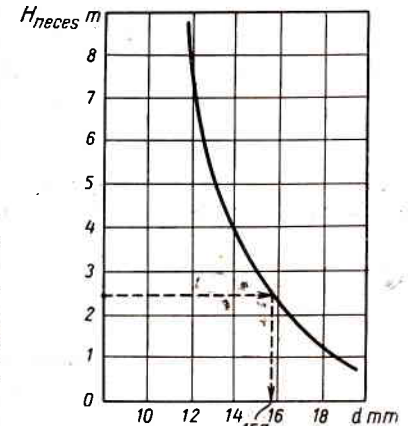


Fig. 127. Para el ejemplo 2



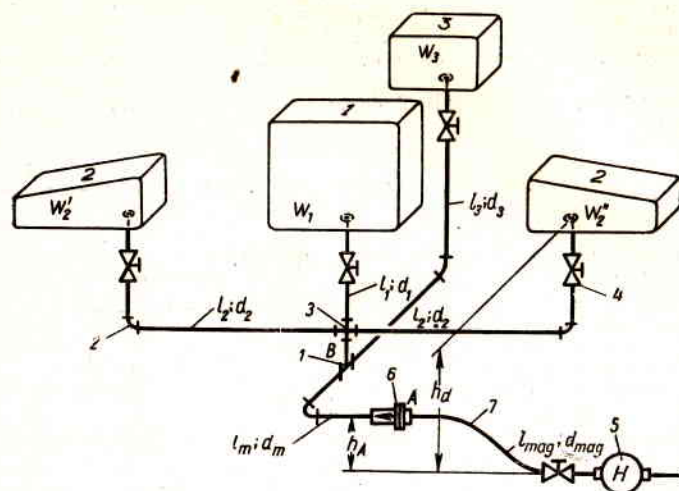


Fig. 128. Para el ejemplo 3:

1 — unión en T; 2 — codo; 3 — cruceta; 4 — válvula; 5 — bomba del abastecedor de combustible; 6 — válvula de retención; 7 — manga

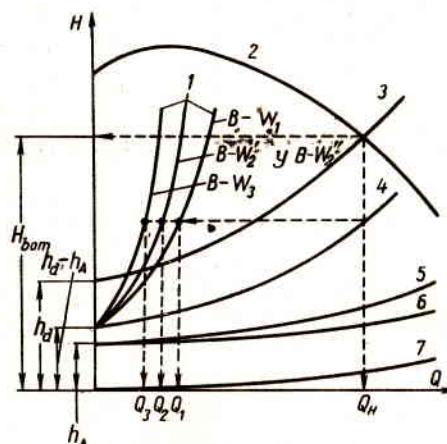


Fig. 129. Para el ejemplo 3:

1 — características de las tuberías a los depósitos; 2 — característica de la bomba; 3 — característica de toda la tubería; 4 — característica sumaria de las tuberías a los depósitos; 5) —  $H_{AB} + H_{m.s.}$ ; 6) —  $H_{m.s.} = f(Q)$ ; 7) —  $H_{A-B} = f(Q)$

9. El tiempo de carga  $T$  será igual a (si la carga termina simultáneamente)

$$T = \frac{\Sigma W}{Q_M} = \frac{W_1}{Q_1} = \frac{W'_2 + W''_2}{Q_2} = \frac{W_3}{Q_3}$$

5. Sumamos las características de las tuberías a los depósitos según la regla de adición de las características de las tuberías acopladas en paralelo.

6. Añadiendo a la suma de las características obtenida de cuatro tuberías paralelas la de la tubería desde la bomba hasta el punto B, obtendremos la característica de toda la tubería compleja.

7. El punto de intersección de la característica de la tubería con la de la bomba del surtidor de combustible permite determinar la presión que desarrolla la bomba  $H_{bomba}$  y su capacidad  $Q_{bomba}$ .

8. Los gastos que se suministran a cada depósito se determinan del modo indicado en la fig. 129.

II. El problema se resuelve de modo gráfico y analítico.

1. Determinamos la capacidad de la bomba del surtidor de combustible  $Q_b$ , partiendo de la condición de que todos los depósitos se llenan durante el tiempo  $T$ , dividiendo el volumen total de los depósitos por  $T$ .

2. En la característica de la bomba hallamos, por la capacidad  $Q_b$ , el punto de trabajo, es decir, la presión que desarrolla la bomba  $H_{bomba}$ . Después de este cálculo, los diámetros de las tuberías deben ser elegidos de tal modo que, con la presión  $H_{bomba}$ , a través de la tubería sea asegurado el paso del gasto  $Q_b$ .

3. Los gastos de las tuberías a los depósitos correspondientes se pueden hallar dividiendo el volumen de cada depósito por el tiempo  $T$ .

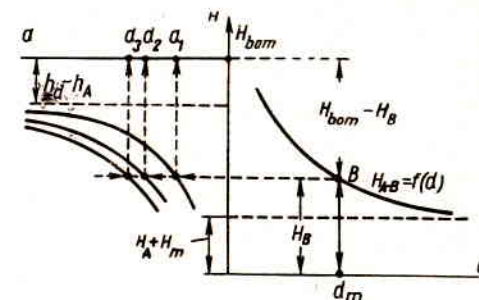


Fig. 130. Para el ejemplo 3

4. Determinamos la magnitud de la pérdida de presión en la manga del surtidor de combustible  $H_m$ , contando con las pérdidas en la válvula de retención de la boquilla del surtidor.

5. Para la tubería principal (entre los puntos A y B) construimos la función de las pérdidas de presión del diámetro de la tubería  $H_{A-B} = f(d)$ . Para eso adoptamos varios valores del diámetro y para cada  $d$  determinamos: el número de Re, el coeficiente  $\lambda_{roz.}$  y las pérdidas de presión  $H_{A-B}$ , incluyendo la diferencia de alturas de nivel de la tubería principal y de la bomba del surtidor de combustible  $h_A$ , así como las pérdidas en la manguera del surtidor  $H_m$ .

6. Construimos la función de las pérdidas de presión del diámetro para cada tubería que va a los depósitos.

La construcción de las funciones mencionadas la realizamos lo mismo que la gráfica  $H_{A-B} = f(d)$ , pero con ejes de coordenadas que tienen su origen en el punto  $H_b$ , siendo la dirección positiva del eje de los diámetros a la izquierda, y del eje de presiones, abajo (véase la fig. 130). A las pérdidas de presión añadimos la altura  $h_d - d_A$ .



Tal disposición, poco acostumbrada de los ejes de coordenadas y de la curvas  $H_i = \varphi(d_i)$  para las tuberías que van a los depósitos, simplifica la obtención de los diámetros buscados.

Adoptamos un diámetro de la tubería principal  $d_M$  y, utilizando las gráficas trazadas, hallamos los diámetros  $d_1, d_2, d_3$ , como se indica con flechas en la fig. 130.

La determinación de los diámetros se puede efectuar de diversos modos por la gráfica y escoger la más adecuada.

El punto  $B$  en la curva  $H_{A-B} = f(d)$  indica cuánta presión ( $H_B$ ) se pierde por el camino desde la bomba hasta el lugar de la ramificación de las tuberías. La presión restante ( $H_{\text{bomba}} - H_B$ ) se emplea para vencer las resistencias durante el movimiento del combustible por las tuberías hacia los depósitos y de la altura  $h_d - h_A$ .

La metodología expuesta es aplicable también, cuando las ramificaciones de la tubería principal hacia los depósitos no están dispuestas sólo en el punto  $B$ , sino en distintos puntos; en este caso, en vez de una curva  $H_{A-B} = f(d)$  hay que trazar tres.

## 12

### Bombas centrífugas

#### § 48. Nociones generales

Como es sabido, la bomba es una máquina que realiza el trasiego del líquido.

Desde el punto de vista físico, el trabajo de la bomba consiste en la transformación de la energía mecánica del motor (mando) en energía del líquido, es decir, la bomba comunica cierta potencia al líquido que fluye a través de ésta. La reserva de la energía que adquiere el líquido en la bomba permite superar las resistencias hidráulicas al flujo y elevarse a la altura geométrica.

La energía que adquiere en la bomba cada kilogramo de líquido, es decir, el incremento de su energía específica, tiene dimensión lineal y, como se ha indicado más arriba, representa una presión que crea la bomba. En el § 47 se ha dicho que la presión creada por la bomba es igual a

$$H_{\text{bomba}} = \left( \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right),$$

o bien

$$H_{\text{bomba}} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2 - \alpha_1 v_1^2}{2g}.$$

De este modo, en el caso general, la presión creada por la bomba se compone del incremento de la altura piezométrica (presión estática) y del incremento de la energía cinética específica (presión dinámica).

Sin embargo, el segundo término por lo común es considerablemente menor que el primero e igual a cero si los diámetros de las tuberías son iguales a la entrada y a la salida ( $d_1 = d_2$ ) y, por consiguiente,  $v_1 = v_2$  (siendo  $\alpha_1 = \alpha_2$ ).

Entonces,

$$H_{\text{bomba}} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{p_{\text{bomba}}}{\gamma} \quad (12.1)$$

El gasto del líquido que impulsa la bomba a la tubería lo denominaremos capacidad de la bomba y lo designaremos con  $Q$ .



Se denomina *potencia útil* de la bomba, o potencia que desarrolla la bomba, la energía que comunica la bomba a todo el flujo del líquido por segundo. De la definición se deduce que esta potencia es igual a

$$N = \frac{Q\gamma H_{\text{bomba}}}{75} [C. V.] \quad (12.2)$$

Lo mismo que toda máquina de trabajo, la bomba consume más potencia que la que desarrolla. La relación entre la potencia que se desarrolla y la que se consume se denomina *rendimiento de la bomba*:

$$\eta = \frac{N}{N_0} \quad (12.3)$$

De aquí que la potencia que consume la bomba es igual a

$$N_0 = \frac{Q\gamma H_{\text{bomba}}}{75\eta} \quad (12.4)$$

o, si tomamos en cuenta (12.1)

$$N = \frac{Qp_{\text{bomba}}}{75\eta} \quad (12.4')$$

Esta fórmula se emplea para elegir el mando para la bomba.

El rendimiento total de la bomba toma en consideración tres formas de pérdidas de energía en la bomba: pérdidas hidráulicas, o sea, las pérdidas de presión por rozamiento y formación de torbellinos, pérdidas volumétricas condicionadas por la circulación del líquido a través de las holguras en la bomba y pérdidas mecánicas, es decir, las provocadas por fricción mecánica en los cojinetes de bolas y prensaestopas, y algunas otras.

Las bombas que se utilizan en la aviación y en otras ramas de la técnica, al parecer son muy diferentes por su construcción y principio de funcionamiento. Sin embargo, casi todas las bombas se pueden dividir en dos tipos principales:

- 1) bombas de álabes o de paletas entre las cuales están las bombas centrífugas, diagonales y axiales;
- 2) bombas volumétricas que incluyen las de émbolo y rotatorias.

En el presente capítulo trataremos sobre las bombas centrífugas que se emplean cada vez más ampliamente en la técnica de aviación y de cohetaría.

#### § 49. Deducción de la ecuación fundamental de la bomba centrífuga

El principio de funcionamiento de la bomba centrífuga consiste en lo siguiente: el órgano principal de trabajo de la bomba es un rodete con álabes (fig. 131) que, girando a grandes revoluciones, comunica al líquido que llena la bomba una presión elevada y lo empuja con

velocidad aumentada a la cámara espiral (voluta). Entre los álabes del rodete y el flujo existe una interacción de fuerza, debido a la cual la energía del mando se transforma en la del flujo.

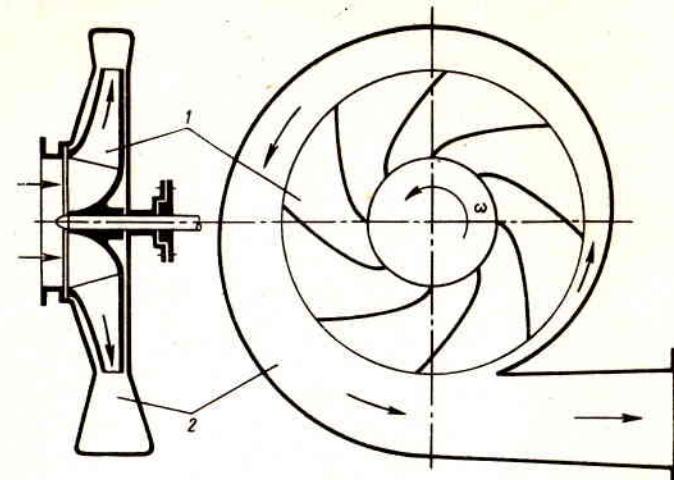


Fig. 131. Esquema de una bomba centrífuga:  
1 — rodete de trabajo; 2 — cámara espiral

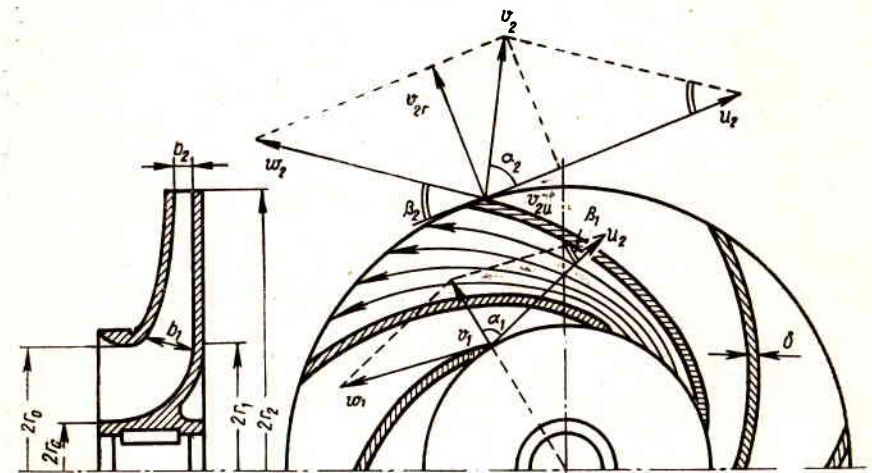


Fig. 132. Esquema de corriente del líquido a través del rodete de trabajo

La voluta espiral tiene la forma de caracol y está destinada para captar el líquido que sale del rodete y transformar parcialmente su energía cinética en la de presión.

El rodete de trabajo de la bomba centrífuga (fig. 132) consta de dos discos, uno de los cuales está fijado por medio de un casquillo



sobre el árbol, y, el otro, que tiene un orificio central para dejar pasar al líquido, está acoplado con el primero por medio de los álabes. Estos últimos son de forma cilíndrica curvilínea o de una forma geométrica más complicada. El líquido se aproxima al rodete a lo largo de su eje de rotación, y continuación se dirige al espacio entre los álabes y después de pasarlos sale por la hendidura entre los discos del rodete.

El movimiento del líquido en los canales entre los álabes del rodete en rotación se puede considerar como resultado de la suma de dos movimientos: de traslación (rotación del rodete) y relativo (movimiento respecto al rodete). Por eso, el vector de la velocidad absoluta del líquido en el rodete  $v$  puede ser hallado como suma de vectores de la velocidad de rotación  $u$  y de la relativa  $\omega$ . Observando la partícula del líquido que se desliza por la superficie del álabe, se puede construir paralelogramos de velocidades para la entrada de esta partícula en el álabe y para la salida de éste. Consideraremos al mismo tiempo, que la velocidad relativa  $\omega$  está dirigida por la tangente al álabe y la de rotación  $u$ , por la tangente a la circunferencia correspondiente. Un paralelogramo de velocidades semejante se puede construir para cualquier punto intermedio sobre el álabe. En lo sucesivo vamos a designar todas las magnitudes referentes a la entrada en el álabe con el índice 1, y las referentes a la salida, con el índice 2.

Designemos el ángulo entre los vectores de la velocidad de rotación y la absoluta con  $\alpha$ , y entre la tangente al álabe y la tangente a la circunferencia del rodete, trazada en el sentido contrario a la rotación con  $\beta$ , con los índices correspondientes. En el caso general el ángulo  $\alpha$  varía con el cambio del régimen de trabajo de la bomba, es decir, al modificarse el número de revoluciones del rodete  $n$  (velocidad  $u$ ) y del gasto  $Q$  (velocidad  $\omega$ ). El ángulo  $\beta$  expresa la inclinación del álabe en cada uno de sus puntos y no depende, por consiguiente, del régimen de trabajo de la bomba.

Para deducir la ecuación fundamental de la teoría de la bomba centrífuga admitamos las dos siguientes suposiciones:

1. Supongamos que la bomba tiene un número infinito de álabes iguales ( $z = \infty$ ), de espesor igual a cero ( $\delta = 0$ ). Esta conjetura significa que suponemos en los canales entre los álabes del rodete una corriente de filete, en la cual la forma de todos los filetes en el movimiento relativo es absolutamente igual y corresponde exactamente a la de los álabes, y las velocidades dependen sólo del radio y no se cambian en la circunferencia del radio dado. Esto puede ocurrir solamente cuando cada filete elemental sea dirigido por su álabe. Tal corriente de filete se muestra esquemáticamente en uno de los canales entre los álabes en la fig. 132.

2. El rendimiento de la bomba es igual a la unidad ( $\eta = 1$ ), es decir, en la bomba no hay ningunas pérdidas y, por consiguiente, toda la potencia, que se gasta para la rotación del rodete, se transmite por completo al líquido. Trabajo semejante de la bomba es posible sola-

mente al trasegar un líquido perfecto, cuando no hay holguras en la bomba, ni fricción mecánica en los prensaestopas y cojinetes de bolas.

Por lo tanto, para facilitar la investigación teórica del trabajo de la bomba centrífuga, hemos idealizado sustancialmente su proceso de trabajo. Vamos a denominar la bomba con  $z = \infty$  y  $\eta = 1$ , bomba centrífuga ideal. Después de analizar la teoría de la bomba ideal pasaremos, naturalmente, a las reales.

Compongamos dos ecuaciones: la de potencias y la de momentos. La primera ecuación significa que la potencia aplicada al árbol del rodete es igual a la energía que adquiere cada segundo el flujo del líquido en la bomba, o sea

$$M\omega = Q\gamma H_{t\infty}, \quad (12.5)$$

donde  $M$  es el momento de rotación en el árbol de la bomba;

$\omega$  es la velocidad angular del rodete;

$H_{t\infty}$  es la presión que desarrolla la bomba ideal o el incremento de la energía específica del líquido en la bomba (los dos índices « $t$ » y « $\infty$ » corresponden a dos suposiciones arriba indicadas).

El sentido de la segunda ecuación consiste en lo siguiente: el momento de rotación en el árbol de la bomba es igual al incremento de la cantidad de movimiento del líquido en el rodete de trabajo en un segundo. Designando el radio de la pieza circular, en la cual están dispuestas las aristas de encaje de los álabes con  $r_1$ , y el radio de la circunferencia exterior del rodete con  $r_2$ , tendremos

$$M = \frac{Q\gamma}{g} (v_2 r_2 \cos \alpha_2 - v_1 r_1 \cos \alpha_1). \quad (12.6)$$

De las ecuaciones obtenidas (12.5) y (12.6) hallamos la presión que crea la bomba ideal:

$$H_{t\infty} = \frac{\omega}{g} (v_2 r_2 \cos \alpha_2 - v_1 r_1 \cos \alpha_1). \quad (12.7)$$

Esta ecuación es fundamental no sólo para las bombas centrífugas, sino también para todas las máquinas de álabes: ventiladores, compresores y turbinas hidráulicas. En el último caso, el momento de la cantidad de movimiento del líquido, al fluir por el rodete no aumenta, sino que disminuye, es decir, toma energía del líquido; por eso, los términos en los paréntesis deben ser anotados con signos contrarios. La ecuación (12.7) fue obtenida por L. Euler y lleva su nombre.

Hay que prestar atención a que la presión que crea la bomba centrífuga ideal, que se mide por la columna del líquido trasegado, no depende del género del líquido, es decir, de su peso específico.

Generalmente, el líquido se aproxima al rodete de trabajo de la bomba sin formar remolino previamente <sup>1)</sup> y entrando en el rodete, ocupa los canales entre los álabes, moviéndose radialmente. Esto

<sup>1)</sup> Excepto el caso cuando delante del rodete principal esté instalado un impulsor auxiliar o una rueda helicoidal (transportador) (véase a continuación).



significa que el vector  $v_1$  está dirigido según el radio y el ángulo  $\alpha_1 = 90^\circ$ . Por consiguiente, el segundo término en la ecuación (12.7) se hace igual a cero, y adquiere la forma

$$H_{t\infty} = \frac{\omega}{g} v_2 r_2 \cos \alpha_2 = \frac{u_2 v_{2u}}{g}, \quad (12.8)$$

donde  $u_2 = \omega r_2$  es la velocidad de rotación a la salida del rodete de trabajo;

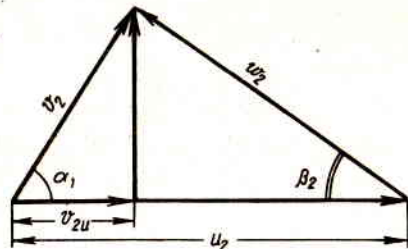


Fig. 133. Triángulo de velocidad a la salida del rodete

$v_{2u}$  es la proyección de la velocidad absoluta a la salida del rodete sobre la dirección de la velocidad de rotación, es decir, el componente tangencial de la velocidad  $v_2$ .

La fórmula (12.8) muestra que para obtener por medio de la bomba centrífuga grandes presiones hay que tener: primero, una gran velocidad de rotación del rodete, y segundo, un valor bastante grande del vector  $v_{2u}$ , es decir, hace falta que haya remolino en la corriente del líquido creado por el rodete. Lo primero se alcanza con valores correspondientes del número de revoluciones y del diámetro del rodete, lo segundo, con un número suficiente de álabes, sus dimensiones y su forma.

#### § 50. Característica de la bomba ideal. Grado de reactividad de la bomba

La ecuación (12.8) no es cómoda para emplearla en los cálculos porque no contiene el gasto  $Q$ . Por eso, transformemos esta ecuación de modo que la presión  $H_{t\infty}$  sea expresada como función del gasto  $Q$  y de las dimensiones del rodete.

Del triángulo de velocidades a la salida del rodete (fig. 133) tenemos

$$v_{2u} = u_2 - v_{2r} \operatorname{ctg} \beta_2, \quad (12.9)$$

donde  $v_{2r}$  es la proyección de la velocidad absoluta de la salida sobre el radio, es decir, el componente radial del vector  $v_2$ .

El gasto del líquido a través del rodete puede ser expresado por el componente radial  $v_{2r}$  y las dimensiones del rodete del modo

siguiente:

$$Q = 2\pi r_2 b_2 v_{2r}, \quad (12.10)$$

donde  $b_2$  es el ancho de la hendidura a la salida del rodete (véase la fig. 132).

De aquí que

$$v_{2r} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2}.$$

Colocando esta expresión en la fórmula (12.9), tendremos

$$v_{2u} = u_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \operatorname{ctg} \beta_2. \quad (12.11)$$

Sustituyamos ahora la componente tangencial  $v_{2u}$  en la ecuación (12.8) por la expresión obtenida (12.11); obtendremos otra forma de la ecuación fundamental para la bomba ideal

$$H_{t\infty} = \frac{u_2}{g} \left( u_2 - \frac{Q \operatorname{ctg} \beta_2}{2\pi r_2 b_2} \right). \quad (12.12)$$

Esta ecuación permite trazar la característica de la bomba centrífuga ideal, es decir, la gráfica de la función de la presión creada por la bomba según el gasto, siendo constante el número de revoluciones del rodete. Como se ve de la ecuación (12.12), la característica de tal bomba representa una línea recta. Pero, la inclinación de esta recta depende del valor del ángulo del álabe  $\beta_2$ . Conviene distinguir aquí tres casos posibles:

1) El ángulo  $\beta_2 < 90^\circ$ . En este caso la  $\operatorname{ctg} \beta_2$  es positiva, y la presión  $H_{t\infty}$  disminuye al aumentar el gasto.

2) El ángulo  $\beta_2 = 90^\circ$ ; la  $\operatorname{ctg} \beta_2 = 0$ ; la presión  $H_{t\infty}$  no depende del gasto y es igual a  $H_{t\infty} = \frac{u_2^2}{g}$ .

3) El ángulo  $\beta_2 > 90^\circ$ ; la  $\operatorname{ctg} \beta_2$  es negativa, la presión  $H_{t\infty}$  crece al aumentar el gasto.

Los tres casos de la característica de la bomba centrífuga ideal se muestran en la fig. 134. Los esquemas correspondientes de los álabes y los paralelogramos de velocidad, siendo iguales  $u_2$  y  $v_{2r}$  se dan en la fig. 135, a, b, c.

Por consiguiente, un álabe inclinado hacia adelante ofrece los mejores resultados para obtener la presión, es decir, con  $\beta_2 > 90^\circ$ , ya que en este caso se crea la presión máxima. Pero, la práctica muestra, que entonces se obtiene un bajo rendimiento. El álabe más ventajoso, y por eso, el que se emplea más a menudo, es el inclinado hacia atrás, o sea, con el ángulo  $\beta_2 < 90^\circ$ ; en la mayoría de los casos este ángulo se hace aproximadamente igual a  $30^\circ$ . Se emplean también álabes radiales ( $\beta_2 = 90^\circ$ ), pero esto trae consigo cierta disminución del rendimiento; su empleo está dictado por otras consideraciones (dimensiones, solidez).



Para comprender las causas de la disminución del rendimiento de la bomba al aumentar el ángulo  $\beta_2$  es necesario examinar de qué está formada la presión  $H_{t\infty}$  y cómo varía la relación entre los sumandos al cambiar  $\beta_2$ .

La presión  $H_{t\infty}$  o, lo que es lo mismo, el incremento de la energía específica total del líquido en el rodete, consta del incremento de la

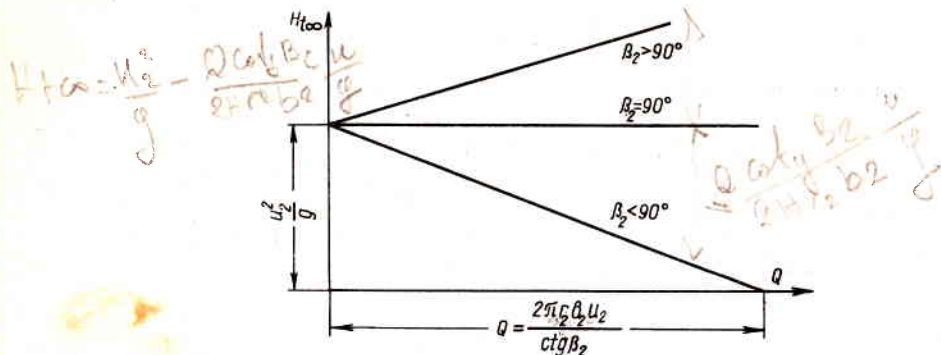


Fig. 134. Características de las bombas centrífugas ideales

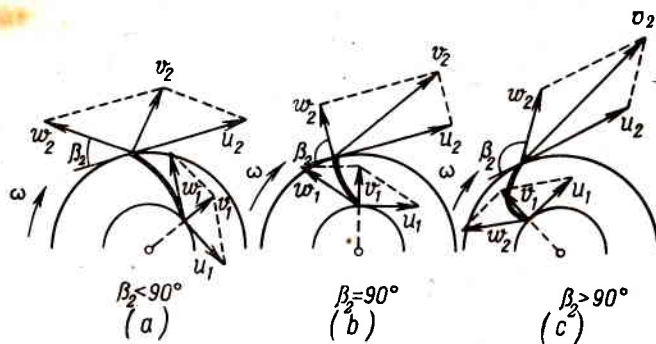


Fig. 135. Formas de álabes y paralelogramos de velocidades

energía específica de la presión y del incremento de la energía cinética específica, o sea

$$H_{t\infty} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (12.13)$$

o en otra forma,

$$H_{t\infty} = H_p + H_v. \quad (12.13')$$

Expresando las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  por sus componentes radiales y tangenciales, tendremos

$$v_2^2 - v_1^2 = v_{2u}^2 + v_{2r}^2 - v_{1u}^2 - v_{1r}^2.$$

Tomando aproximadamente iguales las superficies de entrada y de salida del rodete, se puede considerar que  $v_{1r} = v_{2r}$ . Además, como

se ha indicado anteriormente, la formación de remolinos del flujo a la entrada del rodete es, como regla, nulo, por eso  $v_{1u} = 0$ . Por lo tanto, en vez de lo expuesto anteriormente, tendremos

$$v_2^2 - v_1^2 \approx v_{2u}^2.$$

Tomando en consideración la expresión obtenida, hallamos de la ecuación (12.13), el grado de reactividad de la bomba, es decir, la relación entre la presión que adquiere el líquido debido al incremento de la presión y la presión total; tendremos

$$\frac{H_p}{H_{t\infty}} = 1 - \frac{v_{2u}^2}{2gH_{t\infty}}.$$

Aplicando la fórmula (12.8), anotemos la última expresión en la siguiente forma:

$$\frac{H_p}{H_{t\infty}} = 1 - \frac{v_{2u}}{2u_2}, \quad (12.14)$$

de donde, después de sustituir  $v_{2u}$ , según la fórmula (12.9), hallamos definitivamente

$$\frac{H_p}{H_{t\infty}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{v_{2r}}{u_2 \text{tg } \beta_2} \right). \quad (12.15)$$

De la expresión obtenida se ve, que cuanto mayor es  $v_{2r}/u_2$  y menor es el ángulo  $\beta_2$ , tanto mayor es la parte de la presión  $H_{t\infty}$  que se crea a cuenta del incremento de la presión, o sea, tanto mayor es la reactividad de la bomba. Al contrario, al aumentar el ángulo  $\beta_2$  crece la parte de la presión  $H_{t\infty}$  creada en forma de incremento de la energía cinética. Esta última está ligada con grandes magnitudes de la velocidad de salida del líquido del rodete, lo que trae consigo grandes pérdidas de energía y menor rendimiento de la bomba. Por eso, no es ventajoso emplear álabes con grandes valores del ángulo  $\beta_2$ , es decir, inclinados hacia adelante.

Para el álabe radial ( $\beta_2 = 90^\circ$ ), como se ve en la fórmula (12.15), el grado de reactividad es igual a 1/2, y siendo  $\beta_2 < 90^\circ$  es más de 1/2, pero menos de la unidad.

La modificación de los paralelogramos de velocidades y el aumento de la velocidad absoluta de la salida  $v_2$  al aumentar el ángulo  $\beta_2$  se ven bien en la fig. 135.

## § 51. Número finito de álabes

Hasta ahora hemos considerado el trabajo de la bomba centrífuga ideal, es decir, de la que dispone de un número infinito de álabes, con un rendimiento igual a la unidad. El sentido físico de estas admisiones se ha examinado más arriba (véase el § 49).

Para acercarnos ahora al proceso de trabajo de una bomba real, omitamos primeramente la primera suposición, dejando en vigor la



segunda, es decir, pasamos a la bomba con número finito de álabes.

En la práctica el número de álabes suele ser de seis a doce. En este caso, la corriente relativa entre los álabes del rodete ya no tiene el carácter de filete como se suponía anteriormente y la distribución de la velocidad resulta irregular. En la superficie delantera del álabes marcada con el signo «más» (fig. 136, a) la presión resulta elevada, y la velocidad, disminuida, por eso la distribución de la velocidad entre los álabes resulta aproximadamente igual a la indicada en la misma figura.

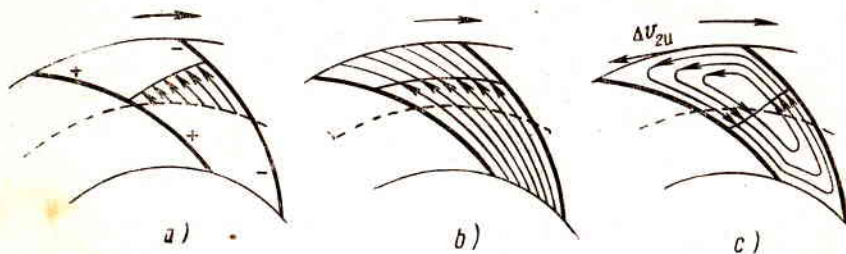


Fig. 136. Flujo en el canal entre los álabes

La distribución de la velocidad se puede considerar como resultado de la suma de dos flujos: el de la distribución uniforme de la velocidad, lo mismo que cuando  $z = \infty$  (fig. 136, b), y el movimiento de rotación entre los álabes en sentido opuesto a la rotación del rodete (fig. 136, c). Este último se observa claramente cuando el gasto es nulo a través del rodete ( $Q = 0$ ).

Debido a la irregularidad en la distribución de las velocidades relativas y absolutas entre los álabes de número finito, hay que introducir en el examen el valor medio de la velocidad en la circunferencia del radio dado. Para nosotros es de máximo interés el valor medio de la componente tangencial de la velocidad absoluta de salida del rodete  $v'_{2u}$ , puesto que determina la presión que crea la bomba. Con un número finito de álabes esta componente resulta menor que con un número infinito, ya que cuanto menor es el número de álabes, tanto menor es el surgimiento de remolinos en el flujo formado por el rodete. Si no hay álabes ( $z = 0$ ), tampoco habrá remolinos, es decir,  $v'_{2u} = 0$ , y el líquido (perfecto) saldrá radialmente del rodete.

La disminución de la velocidad  $v_{2u}$ , al pasar a un número finito de álabes, se puede explicar también por el movimiento de rotación complementario, indicado más arriba. En la circunferencia exterior del rodete (véase la fig. 136, c) este movimiento relativo hace surgir una velocidad absoluta complementaria  $\Delta v'_{2u}$ , la cual está dirigida en sentido contrario a  $v_{2u}$  y, por consiguiente, se resta de esta última.

Por lo tanto, el triángulo de velocidades de velocidades a la salida del rodete se modifica. En la fig. 137 con líneas llenas se muestran los vectores de velocidad para un número infinito de álabes, y con la punteada, para

un número finito. La construcción está dada para valores iguales de  $u_2$  y  $v_{2r}$ , es decir, para velocidades de rotación iguales y para gastos iguales.

La disminución del componente tangencial  $v_{2u}$ , al pasar al número finito de álabes, trae consigo la disminución de la presión creada por la bomba. Designemos la presión teórica para este caso con  $H_{tz}$ . Esta es la presión que crearía la bomba, si las pérdidas de la presión

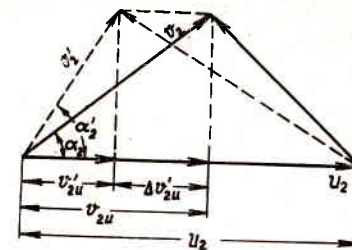


Fig. 137. Variación del triángulo de velocidades al pasar a un número finito de álabes

en el interior de la misma fuesen nulas; la denominan también presión indicadora. Basándose en la fórmula (12.8) tendremos

$$H_{tz} = \frac{u_2 v'_{2u}}{g} \quad (12.16)$$

Denominemos la relación entre  $H_{tz}$  y  $H_{t\infty}$  coeficiente de influencia del número de álabes y lo designemos con  $\mu$ ; entonces

$$\mu = \frac{H_{tz}}{H_{t\infty}} = \frac{v'_{2u}}{v_{2u}}, \quad (12.17)$$

de donde la presión que nos interesa es igual a

$$H_{tz} = \mu H_{t\infty} = \mu \frac{u_2 v_{2u}}{g} \quad (12.18)$$

El problema consiste ahora en determinar el valor numérico del coeficiente  $\mu$ . Es evidente, que el coeficiente  $\mu$  debe, ante todo, ser determinado por el número de álabes  $z$ , pero en su magnitud debe influir también la longitud del álabes, que depende de la relación  $r_1/r_2$  y de la inclinación del mismo, es decir, del valor del ángulo  $\beta_2$ .

Las investigaciones teóricas muestran que el coeficiente  $\mu$  no depende del régimen de trabajo de la bomba, es decir, de  $Q$ ,  $H_{bomba}$  y  $n$ , sino que se determina completamente sólo por la forma geométrica del rodete y es constante para el rodete dado.

Sin examinar la teoría de la influencia del número de álabes del rodete sobre la presión, expondremos solamente el resultado final de



esta teoría, es decir, la fórmula de cálculo para  $\mu$ , a saber

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{2\psi}{z \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]}}, \quad (12.19)$$

donde

$$\psi = (0,55 - 0,65) + 0,6 \text{ sen } \beta_2.$$

Como ejemplo daremos los valores del coeficiente  $\mu$  para  $\beta_2 = 30^\circ$  y para  $r_1/r_2 = 0,5$  (tabla 6).

T a b l a 6

z	4	6	8	10	12	16	24
$\mu$	0,624	0,714	0,768	0,806	0,834	0,870	0,908

De este modo, si  $z \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 1$ .

Puesto que la relación entre  $H_{tz}$  y  $H_{t\infty}$  en la bomba dada queda constante, la característica teórica de la bomba con número finito de álabes, así como de la bomba ideal, siendo constante el número de revoluciones ( $n = \text{const.}$ ), es una línea recta. Si  $\beta_2 = 90^\circ$ , ésta es paralela a la característica de la bomba ideal, y si  $\beta_2 < 90^\circ$ , se interseca con el eje de abscisas, ya que  $H_{tz} = 0$  y  $H_{t\infty} = 0$  con el mismo gasto e igual a

$$Q = \frac{2\pi r_2 b_2 u_2}{\text{ctg } \beta_2}.$$

Esto se deduce de las fórmulas (12.12) y (12.18).

## § 52. Cálculo de las pérdidas hidráulicas en el interior de la bomba. Trazado de la curva característica de la bomba.

Anteriormente se ha indicado que la magnitud  $H_{tz}$  representa la presión que se crearía si las pérdidas de presión en el interior de la bomba fuesen nulas. La presión real  $H_{\text{bomba}}$  (véase el § 48) es menor que la teórica en la magnitud de la suma de las pérdidas de presión en la bomba, es decir

$$H_{\text{bomba}} = H_{tz} - \Sigma h_{\text{bomba}}, \quad (12.20)$$

donde  $\Sigma h_{\text{bomba}}$  es la suma de las pérdidas de presión en la bomba (a la entrada de la bomba, en el rodete de trabajo y en la voluta).

La relación entre la presión real y teórica, siendo finito el número de álabes, se denomina rendimiento hidráulico y se designa con  $\eta_h$ . De este modo tenemos

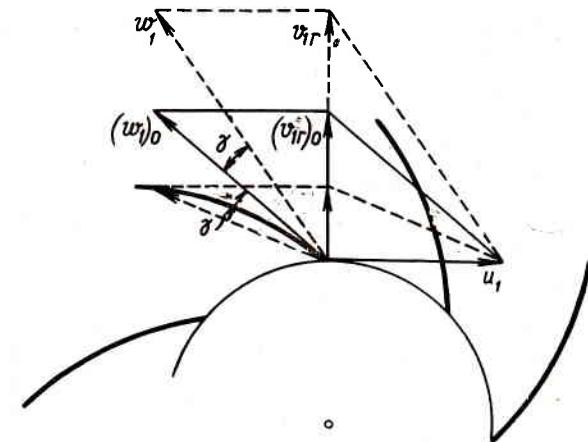
$$\eta_h = \frac{H_{\text{bomba}}}{H_{tz}} = \frac{H_{tz} - \Sigma h_{\text{bomba}}}{H_{tz}}. \quad (12.21)$$

El rendimiento hidráulico de la bomba es siempre mayor que el rendimiento total, porque aquél tiene en cuenta sólo un tipo de pérdidas de energía en la bomba, las hidráulicas.

De las fórmulas (12.18) y (12.21) se deduce que

$$H_{\text{bomba}} = \eta_h H_{tz} = \eta_h \mu H_{t\infty}, \quad (12.21')$$

donde  $H_{t\infty}$  se expresa por las fórmulas (12.7) y (12.12).



F i g. 138. Paralelogramos de velocidades en la entrada del rodete

Las pérdidas hidráulicas en la bomba  $\Sigma h_{\text{bomba}}$  es cómodo considerarlas como suma de los dos sumandos siguientes:

1. Pérdidas hidráulicas corrientes, es decir, las pérdidas de presión por rozamiento y parcialmente por formación de torbellinos dentro de la bomba. Puesto que el régimen de corriente del líquido en la bomba centrífuga es generalmente turbulento, este tipo de pérdidas de presión crece casi proporcionalmente al cuadrado del gasto y puede ser expresado por la fórmula

$$h_1 = k_1 Q^2, \quad (12.22)$$

donde  $k_1$  es constante y depende del rendimiento hidráulico y de las dimensiones de la bomba.

2. Pérdidas por choque al entrar el líquido en el rodete de trabajo y la voluta. Si la velocidad relativa del líquido al entrar en los canales entre los álabes ( $w_1$ ) está dirigida por la tangente al álabe, esto significa que el líquido entra en el rodete paulatinamente, sin choques y torbellinos. En este caso, la pérdida por choque es igual a cero. Pero esto es posible sólo para un gasto determinado, calculado o normal  $Q_0$  y su correspondiente velocidad radial de entrada  $(v_{1r})_0$  (fig. 138).



Si en cambio, el gasto efectivo  $Q$  es mayor o menor que el calculado  $Q_0$ , y la velocidad radial de entrada  $v_{1r}$  es mayor o menor que  $(v_{1r})_0$ , la velocidad relativa  $w$  forma con la tangente al álabe cierto ángulo  $\gamma$ , el flujo del líquido se desliza por el álabe formando un ángulo de ataque positivo o negativo. Con esto resulta como si la corriente chocara contra el álabe, surgiendo remolinos por la parte opuesta. De este modo, surge la pérdida de presión (de energía) por choque, o sea, en la formación de torbellinos. Los paralelogramos de velocidades que corresponden a estos regímenes no calculados, siendo invariable la velocidad de rotación, se muestran en la fig. 138 con una línea punteada, correspondiendo uno de los paralelogramos a la desigualdad  $Q > Q_0$  y, el otro, —  $Q < Q_0$ .

La pérdida de presión por choque se puede considerar proporcional al cuadrado de la diferencia entre el gasto efectivo y el gasto con el cual la pérdida por choque es igual a cero, o sea

$$h_2 = k_2(Q - Q_0)^2. \quad (12.23)$$

Las pérdidas de presión por choque al entrar en la voluta tienen el mismo carácter que al entrar en el rodete, siendo éstas mínimas con casi el mismo gasto  $Q_0$ , y se incluyen en la magnitud  $h_2$ .

La pérdida de presión total en la bomba es igual a la suma de las dos pérdidas estudiadas, es decir

$$\Sigma h_{\text{bomba}} = h_1 + h_2. \quad (12.24)$$

Para el trazado de la curva característica de la bomba con  $n = \text{const.}$  procederemos del modo siguiente.

En el sistema de coordenadas de  $H$  contra  $Q$ , siendo  $n = \text{const.}$ , tracemos en forma de dos rectas inclinadas las características teóricas de la bomba con  $z = \infty$  y con número finito de álaves  $z$  (fig. 139). Después, debajo del eje de abscisas trazamos las curvas de variación de los dos sumandos de la pérdida total de la presión en la bomba:  $h_1$  y  $h_2$ , considerados más arriba. Después de sumar las ordenadas de estas dos curvas obtendremos la curva de variación de  $\Sigma h_{\text{bomba}}$  en función del gasto. Luego, de acuerdo con la fórmula (12.20), restamos  $\Sigma h_{\text{bomba}}$  de  $H_{tz}$  y obtendremos la curva  $H_{tz} = f(Q)$ , es decir, la verdadera característica de la bomba con un número constante de revoluciones.

La curva  $H_{\text{bomba}} = f(Q)$ , mostrada en la fig. 139, es típica para la bomba centrífuga. El valor máximo de la presión  $H_{\text{bomba}}$  se obtiene generalmente no siendo el gasto nulo, ni  $Q = Q_0$ , sino con cierto valor intermedio de  $Q$ .

La obtención de la característica de la bomba mediante el cálculo descrito no puede asegurar alta precisión, debido a lo difícil que es apreciar los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  en las fórmulas (12.22) y (12.23). Por eso se prefiere obtener la característica de la bomba de modo empírico, es decir, durante su ensayo.

Para este fin, a la salida de la bomba que trabaja con un número constante de revoluciones se instala cualquier dispositivo de retención y regulación: grifo, válvula o compuerta. Durante el ensayo se cambia gradualmente la magnitud de su abertura, por ejemplo, se disminuye empezando de la abertura completa, es decir, se efectúa

la estrangulación. Al mismo tiempo se miden el gasto y la presión que se crean por la bomba, manteniendo un número constante de revoluciones. Con la válvula completamente abierta se obtiene el gasto máximo y la presión mínima, igual a la que se pierde en la tubería (punto C en la fig. 140). Si se va cerrando la válvula, el caudal disminuye y la presión crece hasta la máxima

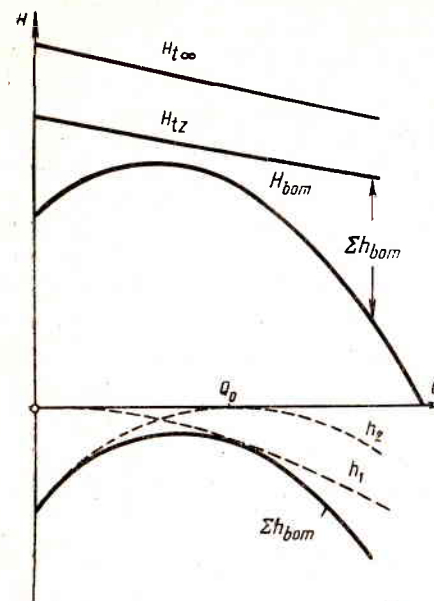


Fig. 139. Trazado de la característica de cálculo

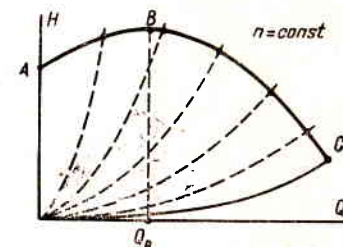


Fig. 140. Desplazamiento del punto de trabajo durante la estrangulación

(punto B). Con la disminución ulterior del gasto, la presión decrece algo y a  $Q = 0$  (punto A), es decir, con la válvula completamente cerrada, la presión tiene generalmente un valor algo mayor que el medio, pero menor que el máximo.

De este modo, la disminución del suministro de la bomba hasta cero, al cerrar la tubería, siendo constante el número de revoluciones, no trae consigo el aumento de la presión hasta una presión peligrosa para la solidez de la bomba y de la tubería. Por eso las bombas centrífugas, a diferencia de las volumétricas, no necesitan válvulas de seguridad.

### § 53. Rendimiento de la bomba

Las pérdidas de energía que se toman en consideración por el rendimiento total de la bomba  $\eta$  se dividen en tres tipos:



1. **Pérdidas hidráulicas** analizadas en el párrafo anterior y apreciadas por el rendimiento hidráulico de la bomba (12.21).

$$\eta_h = \frac{H_{Tz} - \Sigma h_{bomba}}{H_{Tz}} = \frac{H_{bomba}}{H_{Tz}}.$$

2. **Pérdidas volumétricas.** Estas pérdidas están relacionadas con la existencia en la bomba de una corriente contraria del líquido a través de la holgura (empaquetadura), entre el rodete que gira y el cuerpo fijo de la bomba. El rodete de trabajo hace pasar el líquido desde la línea de aspiración a la de expulsión, pero, debido al gradiente de la presión creado por el rodete, cierta cantidad de este líquido retorna a través de la holgura (fig. 141).

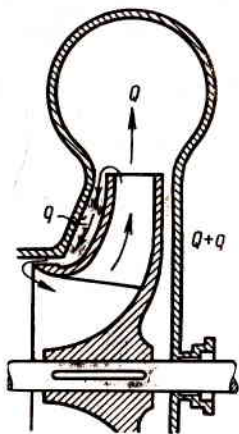


Fig. 141. Esquema de fugas en la bomba centrífuga

En el § 48 decidimos designar el gasto que pasa a la tubería, es decir, el suministro útil de la bomba con  $Q$ . Entonces, el gasto que pasa por el rodete será igual a

$$Q' = Q + q, \quad (12.25)$$

donde  $q$  es el gasto que pasa por la holgura y se denomina fuga.

Las pérdidas volumétricas de energía se aprecian por el *rendimiento volumétrico* de la bomba, igual a

$$\eta_v = \frac{Q}{Q+q} = \frac{Q}{Q'}. \quad (12.26)$$

Los datos más detallados sobre el valor numérico de las pérdidas volumétricas y del rendimiento  $\eta_0$  se exponen en el § 56.

3. **Pérdidas mecánicas.** En éstas se incluyen las pérdidas de energía por fricción mecánica en los prensaestopas y cojinetes de la bomba, así como por rozamiento de la superficie exterior del rodete (del disco del rodete) con el líquido. Si designamos la potencia que se pierde por dicho rozamiento con  $N_{mec.}$ , y la potencia total que consume la bomba con  $N_0$ , el rendimiento mecánico de la bomba será igual a

$$\eta_{mec.} = \frac{N_0 - N_{mec.}}{N_0}. \quad (12.27)$$

(para calcular  $N_{mec.}$ , véase el § 56).

El numerador de esta relación representa la potencia interior o hidráulica y puede ser expresado por la fórmula

$$N_h = N_0 - N_{mec.} = \frac{1}{75} (Q + q) \gamma H_{Tz}. \quad (12.28)$$

Ahora anotemos la expresión del rendimiento total de la bomba como relación entre la potencia que se desarrolla y la que consume

la bomba

$$\eta = \frac{Q \gamma H_{bomba}}{75 N_0}$$

y multipliquemos el numerador de esta relación por  $N_h$ , y el denominador, por el mismo valor, pero expresado por la fórmula (12.28); tendremos

$$\eta = \frac{Q \gamma H_{bomba}}{75 H_0} \cdot \frac{75 N_h}{(Q + q) \gamma H_{Tz}}.$$

Simplificando y agrupando factores obtendremos,

$$\eta = \frac{H_{bomba}}{H_{Tz}} \cdot \frac{Q}{Q + q} \cdot \frac{N_h}{N_0} = \eta_h \eta_v \eta_{mec.}, \quad (12.29)$$

es decir, el rendimiento total de la bomba es igual al producto de sus rendimientos hidráulico, volumétrico y mecánico.

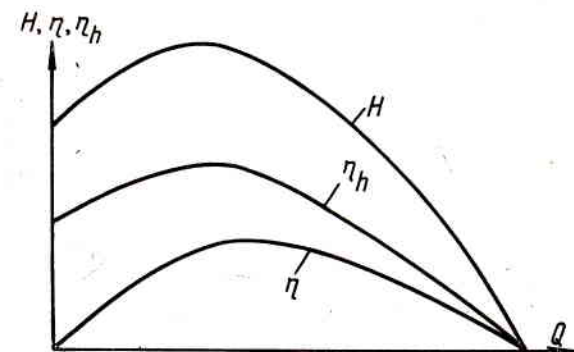


Fig. 142. Curvas  $H$ ,  $\eta$  y  $\eta_h$  en función del gasto

Los valores del rendimiento total de las bombas centrífugas oscilan entre 0,7 y 0,85; las bombas auxiliares pequeñas pueden tener valores más bajos de rendimiento.

En la fig. 142 están las gráficas que muestran el carácter de variación del rendimiento total e hidráulico de la bomba, así como su curva característica para un número constante de revoluciones.

#### § 54. Fórmulas de semejanza

Analicemos regímenes de trabajo semejantes de bombas centrífugas con semejanza geométrica. Como se ha indicado anteriormente (§ 20), para tener una semejanza hidrodinámica se necesita la geométrica, cinemática y dinámica. La semejanza cinemática para las bombas centrífugas significa la igualdad de los triángulos de velocidades construidos para cualesquiera puntos similares de los rodetes



de trabajo. Para tener la semejanza dinámica, es necesaria la igualdad de los números de Reynolds para los flujos en las bombas que se consideran.

En las bombas centrífugas con regímenes de trabajo semejantes existe la proporcionalidad entre las presiones útiles y las pérdidas de presión en las bombas, así como entre los suministros útiles y las

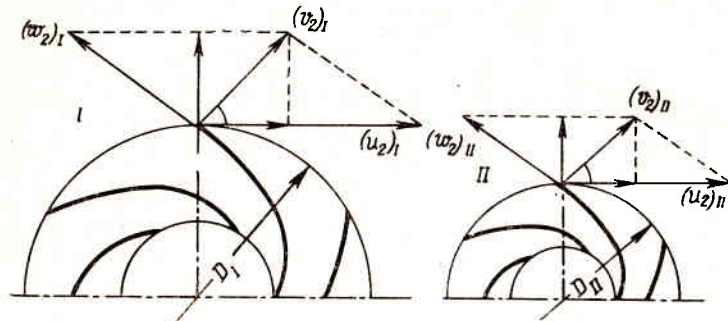


Fig. 143. Para la deducción de las fórmulas de semejanza para bombas centrífugas

fugas, por eso, se puede considerar que al haber semejanza hidrodinámica en las bombas existe la igualdad de sus rendimientos hidráulicos y volumétricos <sup>1)</sup>. El rendimiento mecánico varía algo al pasar de una bomba a otra, a pesar de la semejanza, pero se puede considerar, no cometiendo gran error, que el rendimiento total, lo mismo que  $\eta_h$  y  $\eta_v$ , queda constante.

Consideremos dos regímenes de trabajo semejantes de dos bombas centrífugas con semejanza geométrica. Los valores que se refieren a la primera bomba los designaremos con índice suplementario I, y los referentes a la segunda, con índice II (fig. 143).

Si tenemos en cuenta que las velocidades de rotación de los rodets son proporcionales al producto de los números de revoluciones  $n$  por los diámetros de estos rodets  $D$ , la condición de semejanza cinemática a la salida de los rodets se puede expresar por las siguientes proporciones:

$$\frac{(u_2)_I}{(u_2)_{II}} = \frac{(v_2)_I}{(v_2)_{II}} = \frac{(v_{2u})_I}{(v_{2u})_{II}} = \frac{(v_{2r})_I}{(v_{2r})_{II}} = \frac{(w_2)_I}{(w_2)_{II}} = \frac{(nD)_I}{(nD)_{II}}. \quad (12.30)$$

Puesto que, de acuerdo con la fórmula (12.10)

$$Q = \pi D v_{2r} b_2,$$

<sup>1)</sup> A veces, en la práctica, la igualdad de los coeficientes  $\eta_h$  y  $\eta_v$  se altera algo al pasar de una bomba a otra, debido al cambio de la rugosidad relativa de la parte activa de las bombas que influyen en  $\eta_h$  (el así llamado «efecto de escala»), así como a consecuencia de la no observancia de la igualdad de las dimensiones relativas de las holguras que determinan las fugas.

y de la semejanza geométrica

$$\frac{(D)_I}{(D)_{II}} = \frac{(b_2)_I}{(b_2)_{II}},$$

entonces, según la fórmula (12.30) se puede anotar

$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{(nD^3)_I}{(nD^3)_{II}}. \quad (12.31)$$

Esto significa que la relación entre los gastos en las bombas semejantes con regímenes semejantes son iguales a la relación entre los productos de los números de revoluciones por los diámetros al cubo.

Las presiones teóricas, cuando el número de álabes es infinito, de acuerdo con la fórmula (12.8), son proporcionales al producto de dos velocidades: de rotación y tangencial, y el coeficiente de influencia del número de álabes  $\mu$  es igual para rodets de semejanza geométrica, por consiguiente,

$$\frac{(H_{Tz})_I}{(H_{Tz})_{II}} = \frac{(u_2 v_{2u})_I}{(u_2 v_{2u})_{II}}.$$

De donde, teniendo en cuenta las proporciones (12.30), tendremos

$$\frac{(H_{Tz})_I}{(H_{Tz})_{II}} = \frac{(n^2 D^2)_I}{(n^2 D^2)_{II}}. \quad (12.32)$$

La presión efectiva que crea la bomba es igual a

$$H_{\text{bomba}} = \eta_H H_{Tz} = H.$$

(en lo sucesivo esta presión  $H$  la anotaremos sin el índice «bomba»). Pero puesto que  $(\eta_h)_I = (\eta_h)_{II}$ , en vez de la fórmula (12.32) se puede anotar

$$\frac{H_I}{H_{II}} = \frac{(n^2 D^2)_I}{(n^2 D^2)_{II}}, \quad (12.32')$$

es decir, la relación de las presiones efectivas que se crean por las bombas semejantes con regímenes semejantes de trabajo son iguales a la relación entre los productos de los cuadrados de los números de revoluciones por los diámetros de los rodets.

Basándose en la expresión de la potencia que desarrolla la bomba [fórmula (12.2)], así como empleando las fórmulas (12.31) y (12.32') recién obtenidas, se puede anotar la relación entre las potencias que desarrollan las bombas semejantes con regímenes semejantes de trabajo, a saber

$$\frac{N_I}{N_{II}} = \frac{Q_I H_I \gamma_I}{Q_{II} H_{II} \gamma_{II}} = \frac{n_I^3 D_I^5 \gamma_I}{n_{II}^3 D_{II}^5 \gamma_{II}}. \quad (12.33)$$

Si consideramos los regímenes de trabajo semejantes de la misma bomba con diversos números de revoluciones  $n_1$  y  $n_2$ , las fórmulas anteriores (12.31), (12.32'), (12.33) se simplificarán, ya que  $D$  y  $\gamma$



quedan las mismas y se convertirán en (los índices 1 y 2 significan diferentes números de revoluciones):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad (12.34)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2; \quad (12.35)$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^3. \quad (12.36)$$

Las fórmulas (12.34) y (12.35) se emplean para determinar las curvas características de la bomba al pasar de un número de revoluciones a otro. Si se da la función de  $H$  según  $Q$ , con  $n_1 = \text{const.}$ , la curva

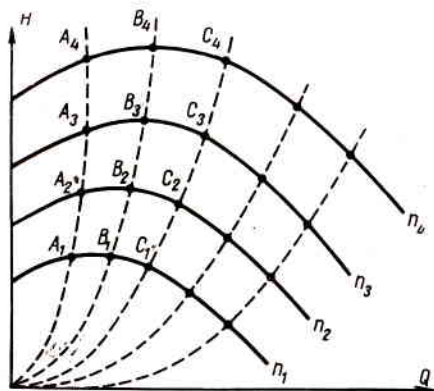


Fig. 144. Recuento de la característica de la bomba para distintas revoluciones

análoga para  $n_2 = \text{const.}$  puede ser obtenida determinando las abscisas de los puntos de la primera curva (de los gastos) proporcionales a la relación de los números de revoluciones, y las ordenadas (presiones), proporcionales al cuadrado de esta relación (fig. 144).

De este modo, se puede reconstruir la curva característica de la bomba para cualquier otro número de revoluciones:  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $n_4$ , etc., y obtener una serie de curvas características de la misma bomba para diversos  $n$ .

En estas curvas, los puntos ligados entre sí por las relaciones de las coordenadas (12.34) y (12.35), por ejemplo, los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , etc., representan los regímenes de trabajo semejantes uno a otro. La otra serie de puntos  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , etc. representa la segunda serie de regímenes semejantes; los puntos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , etc. la tercera serie, etc.

No es difícil hallar la ecuación de las curvas, en las cuales se encuentran los puntos semejantes (en sentido del régimen de trabajo).

De acuerdo con las ecuaciones (12.34) y (12.35) se puede anotar para una serie de puntos:

$$\frac{H_1}{Q_1^2} = \frac{H_2}{Q_2^2} = \frac{H_3}{Q_3^2} = \text{const}_1.$$

De ahí que para una serie de regímenes semejantes tenemos

$$H = \text{const}_1 Q^2.$$

Para otra serie

$$H = \text{const}_2 Q^2.$$

Por consiguiente, los puntos que representan los regímenes semejantes, en el sistema de coordenadas  $H$  y  $Q$  están situados en las parábolas de segundo grado que salen del origen de las coordenadas. Estas parábolas se denominan parábolas de regímenes semejantes. En la fig. 144 están trazadas con líneas punteadas <sup>1)</sup>.

Basándose en lo indicado anteriormente respecto al rendimiento hidráulico y volumétrico para regímenes semejantes, se puede afirmar que las parábolas de los regímenes semejantes son al mismo tiempo curvas de valores constantes de  $\eta_h$  y  $\eta_v$ . Se puede considerar aproximadamente que el rendimiento total también queda constante a lo largo de la parábola de los regímenes semejantes.

Debido a la semejanza de regímenes de trabajo de la bomba centrífuga surge una pregunta: si cambia el número de revoluciones cuándo se conserva y cuándo se altera la semejanza de regímenes de trabajo de la bomba centrífuga?

El régimen de trabajo de la bomba siempre se determina por el punto de intersección de las características de la bomba y de la tubería, por eso, siendo la característica de la tubería invariable (la válvula está siempre abierta), el cambio del número de revoluciones de la bomba provoca el desplazamiento del punto de trabajo a lo largo de la característica de la tubería. Si la característica de la tubería representa una parábola de segundo grado, que sale del origen de las coordenadas, esta característica coincide con una de las parábolas de los regímenes semejantes y, por consiguiente, al cambiar el número de revoluciones, la semejanza se conservará. Así, por ejemplo, una tubería cerrada con régimen turbulento de la corriente tiene una característica que sale del origen de las coordenadas y próxima a la parábola de segunda potencia. Por eso, se puede considerar que, en el caso dado, el cambio del número de revoluciones de la bomba no alterará la semejanza de los regímenes de su trabajo.

Pero, si por la tubería el líquido se trasiega de un recipiente inferior al superior, es decir, si la diferencia de niveles  $\Delta z \neq 0$ , la carac-

<sup>1)</sup> Hay que señalar, que a lo largo de la parábola de regímenes semejantes cambia en algo el número de  $Re$ , pero, como muestran las investigaciones, los regímenes de corriente en las bombas centrífugas son muy próximos a los de resistencia cuadrática, es decir, a aquéllos sobre los cuales prácticamente no influye  $Re$ . En el caso dado la semejanza cinemática juega un papel decisivo.

terística de la tubería tendrá la forma mostrada en la fig. 145. El cambio del número de revoluciones de la bomba de  $n_1$  a  $n_2$  provocará el desplazamiento del punto de trabajo de  $A$  a  $B$ . Pero los puntos  $A$  y  $B$  pertenecen a distintas parábolas de regímenes semejantes, por eso, la semejanza de los regímenes se alterará.

De lo expuesto se deduce, que son posibles dos modos de regular la bomba centrífuga: primero, con la estrangulación indicada en el

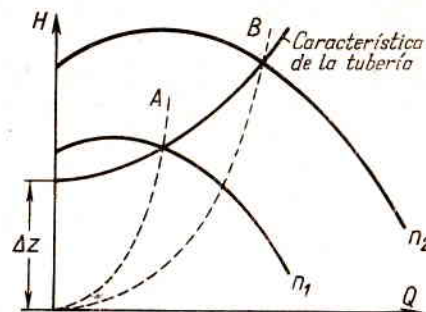


Fig. 145. Puntos de trabajo al alterar la semejanza

§ 52, y segundo, cambiando el número de revoluciones de la bomba. Durante la estrangulación se cambia la característica de la tubería y el punto de trabajo se desliza por la característica invariable de la bomba (véase la fig. 140), y, al cambiarse el número de revoluciones, se cambia la característica de la bomba y el punto de trabajo se desliza por la característica de la tubería (véase la fig. 144).

Es más económico el segundo modo de regular, cambiando el número de revoluciones, ya que se puede asegurar una constancia aproximada del rendimiento de la bomba (si la característica de la tubería sale del origen de las coordenadas). Pero el cambio del número de revoluciones está ligado habitualmente con ciertas dificultades, ya que, para eso, hacen falta dispositivos complementarios; por eso, es más cómodo realizar la regulación de la bomba mediante la estrangulación. Al aplicar la estrangulación, el valor del rendimiento de la bomba varía según la curva indicada en la fig. 142 y, por consiguiente, con disminución considerable del suministro disminuirá también considerablemente el rendimiento de la bomba.

#### § 55. Velocidad característica y su relación con la forma del rodete

Aprovechemos las fórmulas de semejanza obtenidas anteriormente para deducir un criterio de gran importancia en el cálculo y diseño de las bombas centrífugas. Este criterio recibe el nombre de velocidad característica.

Basándose en la fórmula (12.31), se puede anotar.

$$\frac{D_I^3}{D_{II}^3} = \left(\frac{Q_I}{Q_{II}}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{n_I}{n_{II}}\right)^{-2/3}$$

Colocando esta expresión en la fórmula (12.32), tendremos

$$\frac{H_I}{H_{II}} = \left(\frac{Q_I}{Q_{II}}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{n_I}{n_{II}}\right)^{4/3}$$

Agrupando los factores y elevando a la potencia 3/4, tendremos

$$\frac{n_I \sqrt[3]{Q_I}}{H_I^{3/4}} = \frac{n_{II} \sqrt[3]{Q_{II}}}{H_{II}^{3/4}} = \text{const.} \quad (12.37)$$

La expresión obtenida es la misma no sólo para dos bombas semejantes I y II, sino también para una serie de bombas semejantes que trabajan en regímenes semejantes.

En dicha serie de bombas semejantes imaginemos una bomba patrón que desarrolla una presión  $H_{\text{patr.}} = 1 \text{ m}$  y una potencia  $N_{\text{patr.}} = 1 \text{ C. V.}$ , siendo  $\gamma = 1.000 \text{ kg/m}^3$ .

Aplicando la fórmula de la potencia (12.2), es fácil determinar el suministro de la bomba patrón. Tendremos

$$Q_{\text{patr.}} = \frac{75 N_{\text{patr.}}}{\gamma H_{\text{patr.}}} = \frac{75 \cdot 1}{1 \cdot 1.000} = 0,075 \text{ m}^3/\text{seg} = 75 \text{ lit./seg.}$$

Ahora relacionemos entre sí los parámetros de la bomba patrón ( $Q_{\text{patr.}}$ ,  $H_{\text{patr.}}$ ,  $n_{\text{patr.}}$ ) con los de cualquier otra bomba de esta serie ( $Q$ ,  $H$ ,  $n$ ) con regímenes semejantes de trabajo, es decir, apliquemos la ecuación (12.37):

$$\frac{n_{\text{patr.}} \sqrt[3]{Q_{\text{patr.}}}}{H_{\text{patr.}}^{3/4}} = \frac{n \sqrt[3]{Q}}{H^{3/4}}$$

Colocando los valores de  $Q_{\text{patr.}}$  y  $H_{\text{patr.}}$ , determinemos el número de revoluciones de la bomba patrón.

$$n_{\text{patr.}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,075}} \cdot \frac{n \sqrt[3]{Q}}{H^{3/4}} = 3,65 \frac{n \sqrt[3]{Q}}{H^{3/4}}$$

El número hallado se designa con  $n_s$  y se denomina velocidad característica o número específico de revoluciones de la bomba centrífuga. De este modo, tenemos definitivamente

$$n_s = 3,65 \frac{n \sqrt[3]{Q}}{H^{3/4}} \quad (12.38)$$

El sentido del número  $n_s$ , como se deriva de la deducción, consiste en lo siguiente: es el número de revoluciones de la bomba patrón, semejante a la dada, que crea en un régimen semejante la presión  $H_{\text{patr.}} = 1 \text{ m}$  y el gasto  $Q = 0,075 \text{ m}^3/\text{seg}$ . Hay que tener en cuenta,



que el rendimiento hidráulico y volumétrico de las bombas mencionadas se suponen iguales.

La potencia que desarrolla en este caso la bomba patrón será igual a 1 C. V., pero con la condición de que  $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Para líquidos más ligeros, la potencia será menor, para los más pesados, mayor. Por eso, con el fin de generalizar es mejor no introducir el valor de la potencia en la determinación de  $n_s$ .

El diámetro del rodete de la bomba patrón es fácil de determinar. Según la fórmula (12.32) se puede anotar

$$\frac{H_{\text{patr.}}}{H} = \frac{n_{\text{patr.}}^2 D_{\text{patr.}}^2}{n^2 D^2},$$

de donde

$$D_{\text{patr.}} = \frac{nD}{n_s \sqrt{H}}. \quad (12.39)$$

Al aplicar las fórmulas (12.38) y (12.39) hay que recordar que  $H$  se debe expresar en m;  $Q$ , en  $\text{m}^3/\text{seg}$ ; y  $n$  en r. p. m.

La velocidad característica o número específico de revoluciones caracterizan, en condiciones determinadas, la capacidad de la bomba de crear presión («capacidad de presión») y asegurar el suministro del líquido («capacidad de suministro»). Cuanto mayor es el coeficiente  $n_s$ , tanto menor es la «capacidad de presión» (con  $Q$  y  $n$  dados) y tanto mayor es la «capacidad de suministro» de la bomba (con  $H$  y  $n$  dados).

El coeficiente  $n_s$  está relacionado estrechamente con la forma del rodete de la bomba.

Las bombas con valor pequeño de  $n_s$ , tienen una anchura relativamente pequeña del rodete ( $b_2/D_2$ ), pero tienen gran valor de  $D_1/D_2$ , es decir, un álabe largo, lo que es indispensable para obtener gran presión. El líquido fluye por este rodete en el plano perpendicular al eje de rotación.

Con el aumento de  $n_s$ , la relación  $\frac{D_2}{D_1}$ , así como  $\frac{D_2}{D_0}$  disminuye, es decir, los álabes se acortan y la anchura relativa del rodete  $\frac{b_2}{D_2}$  aumenta. Además, la corriente a través del rodete sale del plano de rotación y se extiende cada vez más. A valores máximos de  $n_s$  obtenemos en el límite una corriente a lo largo del eje de rotación de los rodetes axiales correspondientes a este caso.

El ángulo  $\beta_2$  del álabe, al aumentar  $n_s$  de 40 a 200, disminuye aproximadamente de  $35^\circ$  a  $15^\circ$ .

Según sea la velocidad característica  $n_s$ , las bombas centrífugas y otras de paletas, semejantes a éstas, se dividen en los siguientes tipos:

1) lentas:  $n_s \leq 80$ ;  $\frac{D_2}{D_1} = 2,2 \div 3,5$ ;

2) normales:  $n_s = 80 \div 150$ ;  $\frac{D_2}{D_1} = 2,2 \div 1,8$ ;

3) rápidas:  $n_s = 150 \div 300$ ;  $\frac{D_2}{D_1} = 1,8 \div 1,3$ ;

4) diagonales o helicoidales  $n_s = 300 \div 600$ ;  $\frac{D_2}{D_1} = 1,3 \div 1,1$ ;

5) axiales o de hélice:  $n_s = 600 \div 1.200$ ;  $\frac{D_2}{D_1} = 1$ .

Los esquemas aproximados de los rodetes que corresponden a estos tipos de bombas, se muestran en la fig. 146.

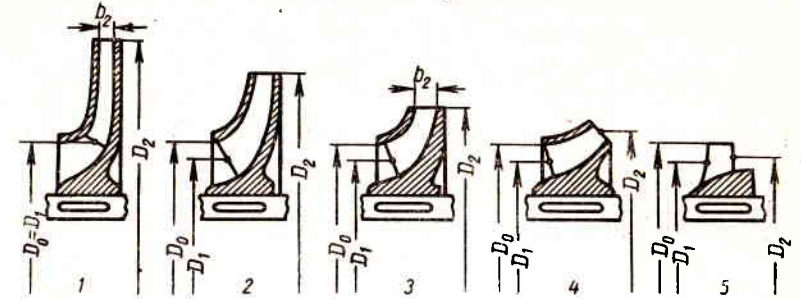


Fig. 146. Variedades de los rodetes de paleta

Los primeros tres tipos de bombas: lentas, normales y rápidas, corresponden al tipo de las bombas centrífugas, y las dos últimas, diagonales y axiales, salen de los límites de este tipo. Pero no hay límites acusados entre las variedades enumeradas; al aumentar  $n_s$  tiene lugar el paso gradual del rodete de tipo puramente centrífugo al diagonal y puramente axial.

## § 56. Relación de la velocidad característica con el rendimiento de la bomba

El paso de una variedad de bomba de álabe a otra, es decir, el cambio de la velocidad característica  $n_s$  influye en el rendimiento de la bomba. Pero la influencia del coeficiente  $n_s$  sobre los rendimientos hidráulico, volumétrico y mecánico será diferente.

El rendimiento hidráulico, como muestran las investigaciones, varía muy poco con el cambio de  $n_s$  y depende en grado mucho mayor de la perfección de la forma de la parte de la bomba por la que fluye el líquido, de su rugosidad y de las dimensiones de la bomba. En cuanto a los rendimientos volumétrico y mecánico, éstos cambian considerablemente al acercarse  $n_s$  a su límite inferior.

Con la disminución de  $n_s$ , aumenta considerablemente la magnitud relativa de la pérdida de potencia por rozamiento de las superficies laterales del rodete de trabajo (del disco del rodete) contra el líquido, es decir, disminuye el rendimiento mecánico de la bomba, así como crece la parte del gasto que circula a través de las holguras de la bomba, es decir, crece la magnitud relativa de las fugas y disminuye el rendimiento volumétrico.

De este modo, el empleo de la bomba centrífuga con valor pequeño de  $n_s$  está ligado con la disminución del rendimiento total de la bomba y, dicha disminución será tanto mayor, cuanto menor es  $n_s$ . Esta circunstancia determina el límite inferior para  $n_s$ , que se dicta por consideraciones económicas. Y éstas dependen de las particularidades del aparato de vuelo en el cual está instalada la bomba.

Para juzgar sobre el valor mínimo tolerable de  $n_s$ , así como para facilitar la apreciación del valor numérico del rendimiento de la bomba con distintos  $n_s$ , a continuación deduciremos las fórmulas de cálculo para magnitudes relativas de las pérdidas de energía en la bomba y para los rendimientos correspondientes como funciones de  $n_s$ .

Primeramente vamos a estudiar la magnitud relativa del gasto que circula a través de la holgura de la empaquetadura y a expresar el rendimiento volumétrico de la bomba.

El gasto que pasa a través de la holgura de la empaquetadura (fuga) puede ser expresado con la fórmula habitual de excurrimiento

$$q = \mu S \sqrt{2gH_{\text{emp.}}}$$

donde  $S$  es la superficie de la holgura (para el caso de empaquetadura unilateral) igual a

$$S = \pi D_{\text{emp.}} \delta;$$

$D_{\text{emp.}}$  es el diámetro de la empaquetadura;

$\delta$  es la magnitud de la holgura que tomaremos proporcional al diámetro  $D_{\text{emp.}}$ , es decir,

$$\delta = \frac{D_{\text{emp.}}}{m};$$

$\mu$  es el coeficiente de gasto durante el escurrimiento por la holgura, el cual para empaquetaduras corrientes es igual a  $\mu = 0,4 \div 0,5$ , y para las especiales de laberinto 0,3;

$H_{\text{emp.}}$  es la presión con la cual se efectúa el escurrimiento por la holgura. La magnitud  $H_{\text{emp.}}$  puede ser hallada como diferencia de las alturas piezométricas que crea el rodete (es decir, la presión  $H_p$  para el número finito de álabes, teniendo en cuenta las pérdidas hidráulicas), menos la caída de presión en el espacio entre el rodete y el cuerpo de la bomba, que surge debido a la rotación del líquido. Puesto que en el espacio indicado una de las paredes es fija y la otra es móvil, se considera habitualmente que el líquido gira con velocidad igual a la mitad de la de rotación del rodete.

Aplicando la fórmula (3.3) para la presión del líquido en reposo relativo y tomando en cuenta las consideraciones indicadas más arriba, tendremos:

$$H_{\text{emp.}} = \mu \eta_H H_p - \frac{\omega^2}{32g} (D_1^2 - D_{\text{emp.}}^2).$$

La presión  $H_{\text{emp.}}$  se puede considerar aproximadamente proporcional a la que crea la bomba y expresarla del modo siguiente:

$$H_{\text{emp.}} = k_{\text{emp.}} H,$$

donde  $k_{\text{emp.}} = 0,6 \div 0,85$ .

El diámetro de la empaquetadura  $D_{\text{emp.}}$  es aproximadamente igual al de la entrada  $D_0$ , el cual, como se mostrará en el párrafo siguiente, al hacer diseño,

debe elegirse igual a

$$D_1 = k_0 \sqrt[3]{\frac{Q}{n}},$$

donde el coeficiente  $k_0 = 4,2 \div 4,5$ .

Introduciendo los valores de las magnitudes, citados en la ecuación para la fuga, buscaremos la relación de esta última al gasto útil, como función de  $n_s$ . Tendremos

$$\frac{q}{Q} = \frac{\mu \pi D_{\text{emp.}}^2 \sqrt{2gk_{\text{emp.}} H}}{mQ} = \frac{\mu \pi k_0^3 \sqrt{2gk_{\text{emp.}}}}{m} \cdot \frac{H^{1/2}}{Q^{1/3} n^{2/3}},$$

Tomando en cuenta la expresión para  $n_s$  (12.38), tendremos

$$\frac{q}{Q} = A_1 \frac{1}{\left(\frac{n \sqrt{Q}}{H^{3/4}}\right)^{2/3}} = A_1 \frac{3,65^{2/3}}{n_s^{2/3}} = \frac{A}{n_s^{2/3}},$$

donde

$$A = \frac{\pi \mu k_0^3 \sqrt{2gk_{\text{emp.}}} \cdot 3,65^{2/3}}{m}.$$

Para  $m = 300$ ;  $\mu = 0,5$ ;  $K_{\text{emp.}} = 0,8$  y  $k_0 = 4,5$ , la constante  $A$  resulta igual a  $A \approx 1,0$ . Para este valor de  $A$ , en la fig. 147 está construida la función

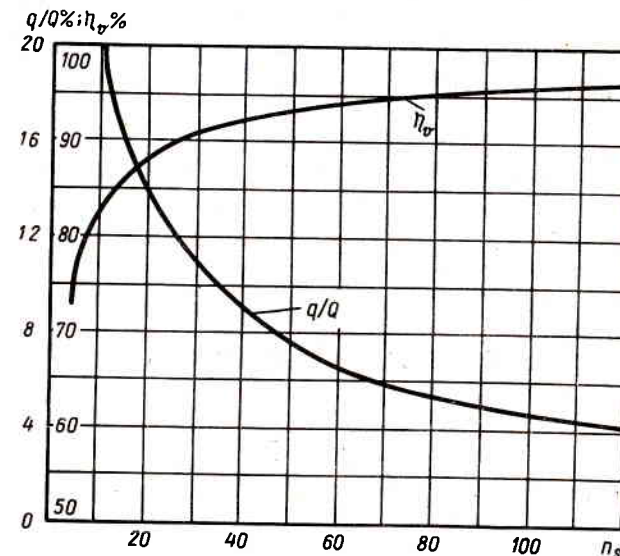


Fig. 147. Gráfica de  $q/Q$  y  $\eta_v$  en función de  $n_s$

de la fuga relativa por una empaquetadura unilateral  $\frac{q}{Q}$  de  $n_s$ . La gráfica muestra claramente el aumento de la importancia de la fuga al disminuir la rapidez de marcha de la bomba. Con empaquetadura bilateral el valor de  $A$  será dos veces mayor.



La relación entre el rendimiento volumétrico de la bomba y  $n_s$  puede ser expresada por medio de la siguiente fórmula:

$$\eta_v = \frac{Q}{Q+q} = \frac{1}{1+\frac{q}{Q}} = \frac{1}{1+\frac{A}{n_s^{2/3}}} \quad (12.40)$$

La curva de la variación del rendimiento volumétrico se muestra en la misma fig. 147.

El rozamiento del disco del rodete contra el líquido generalmente tiene lugar en el régimen turbulento, por eso la tensión tangencial  $\tau$ , igual que en los tubos, se puede considerar proporcional al producto del peso específico del líquido por la presión dinámica. Esta en el presente caso debe ser expresada por la velocidad de rotación del rodete, la cual varía proporcionalmente al radio; de este modo tenemos

$$\tau = c_f \gamma \frac{u^2}{2g},$$

donde  $c_f$  es el coeficiente adimensional de proporcionalidad, denominado coeficiente de rozamiento.

La potencia que se pierde por rozamiento del disco del rodete contra el líquido puede ser calculada integrando la expresión para el momento elemental de rozamiento multiplicado por la velocidad angular de rotación del rodete, o sea

$$N'_{roz.} = k\omega \int_0^{D/2} \tau r dS,$$

donde  $dS$  es la superficie elemental, igual a

$$dS = 2\pi r dr;$$

$r$  es el radio;

$k$  es el coeficiente que toma en cuenta la parte de la superficie total del disco del rodete sometida al rozamiento; habitualmente  $1 < k < 2$ .

Sustituyendo  $\tau$  por la expresión escrita anteriormente y teniendo en cuenta que  $u = \omega r$ , así como considerando que en la primera aproximación el coeficiente de rozamiento  $c_f$  en el régimen turbulento es constante por toda la superficie del disco, se puede efectuar la integración del modo siguiente:

$$N'_{roz.} = C_1 \gamma \omega^3 \int_0^{D/2} r^4 dr = C_2 \gamma \omega^3 D^5,$$

o

$$N'_{roz.} = C \gamma u^3 D^2,$$

donde  $C$  es la constante que incluye los coeficientes numéricos, así como  $k$ ,  $c_f$  y otras magnitudes constantes.

Las investigaciones muestran, que para los cálculos aproximados, cuando las superficies están bien elaboradas, la constante  $C$  se puede considerar igual a  $C = 1,2 \times 10^{-6}$  en el sistema técnico de unidades; la potencia  $N_{roz.}$  se expresa en caballos de vapor.

Hallemos la relación entre la potencia de rozamiento y la potencia hidráulica de la bomba (véase el § 53):

$$\frac{N'_{roz.}}{N_H} = \frac{C \gamma u^3 D^2}{Q \gamma H} 75 \eta_v \eta_H.$$

Expresemos el diámetro del rodete de trabajo  $D$  por la velocidad de rotación  $u_2$  y el número de revoluciones  $n$ ; y la velocidad de rotación, por la presión, mediante las siguientes relaciones:

$$u_2 = \frac{\pi D n}{60} \text{ y } H = k_1 \frac{u_2^2}{2g},$$

de donde

$$D = \frac{60 u_2}{\pi n} = \frac{60}{\pi n} \sqrt{\frac{1}{k_1} 2gH}.$$

Realizando la sustitución en la ecuación principal, tendremos

$$\frac{N'_{roz.}}{N_H} = 75 \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 C \left(\frac{2g}{k_1}\right)^{5/2} \eta_H \eta_v \frac{H^{3/2}}{Q n^2},$$

o, introduciendo  $n_s$ , y, aplicando la expresión hallada más arriba para  $\eta_v$  (12.40), tendremos

$$\frac{N'_{roz.}}{N_H} = \frac{B}{n_s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A}{n_s^{2/3}}}, \quad (12.41)$$

$$\text{donde } B = 3,65^2 \cdot 75 \cdot C \left(\frac{60}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{2g}{k_1}\right)^{5/2} \eta_H;$$

siendo  $k_1 = 1,2$ ,  $\eta_H = 0,80$  y  $C = 1,2 \times 10^{-6}$ ,  $B = 377$ .

La curva de  $\frac{N'_{roz.}}{N_H}$  en función de  $n_s$  para el valor hallado de  $B$  y para  $A \approx 1,0$  se da en la fig. 148, donde se ve claramente cuán considerable es el aumento de las pérdidas de la potencia relativa, provocadas por el rozamiento del disco del rodete contra el líquido, al disminuir  $n_s$ .

Para pasar de  $\frac{N'_{roz.}}{N_H}$  al rendimiento mecánico de la bomba vamos a considerar éste como

$$\eta_M = \eta'_M \eta''_M,$$

donde  $\eta'_M$  es el rendimiento que tiene en cuenta las pérdidas de la potencia por rozamiento del disco del rodete contra el líquido y, por consiguiente, es igual a

$$\eta'_M = \frac{N_H}{N_H + N'_{roz.}} = \frac{1}{1 + \frac{N'_{roz.}}{N_H}}; \quad (12.42)$$

$\eta''_M$  es el rendimiento que tiene en cuenta las pérdidas de la potencia por rozamiento en los prensaestopas y cojinetes, y es igual a

$$\eta''_M = \frac{N_0 - N''_{roz.}}{N_0} = \frac{N_H + N'_{roz.}}{N_0}.$$

En la última expresión  $N''_{roz.}$  es la pérdida de la potencia por rozamiento en los prensaestopas y cojinetes;  $N_0$  es la potencia total que consume la bomba e igual a la suma

$$N_0 = N_H + N'_{roz.} + N''_{roz.}.$$

Aplicando la función  $\frac{N'_{roz.}}{N_0}$  del coeficiente  $n_s$ , obtenida más arriba, se puede trazar para los valores citados de las constantes  $A$  y  $B$  la función  $\eta''_M$  de  $n_s$ . El coeficiente  $\eta''_M$  se puede considerar independiente de  $n_s$  e igual, por ejemplo, a 0,95.

La curva que muestra la caída del coeficiente  $\eta'_M$ , al disminuir  $n_s$ , se muestra en la misma fig. 148.

Hay que tener en cuenta que al hacer los pasos que comunican el espacio entre el rodete y las paredes fijas con la caja espiral (aproximadamente el 3% del diámetro del rodete por cada lado) se puede restablecer una parte de energía que se pierde por rozamiento del disco del rodete contra el líquido, utilizando

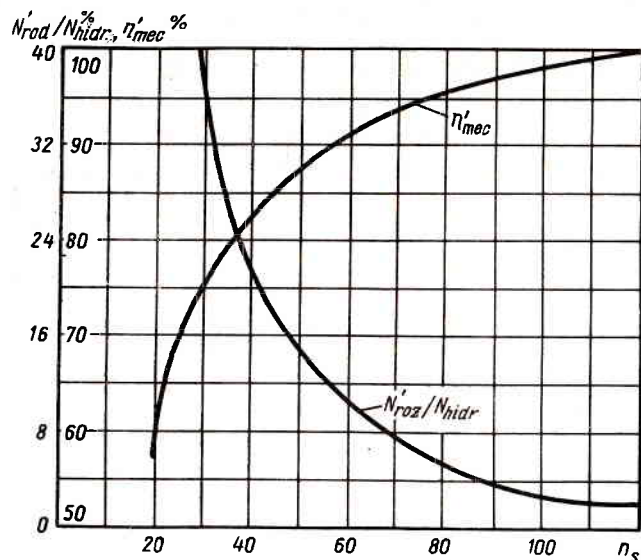


Fig. 148. Gráfica de  $N'_{roz}/N'_H$  y  $\eta'_M$  en función de  $n_s$

la energía cinética del líquido arrastrado por el disco. Por eso, el valor real del rendimiento mecánico puede ser algo mayor que el calculado.

Al emplear las curvas mencionadas  $\frac{q}{Q}$  y  $\frac{N'_{roz}}{N'_H}$ , así como  $\eta_v$  y  $\eta'_M$  según  $n_s$ , hay que tener en cuenta su carácter aproximado. Para obtener valores más exactos de estas magnitudes es necesario calcular los valores de las constantes  $A$  y  $B$  en consonancia con los datos concretos.

No es posible dar la expresión analítica para la suma de pérdidas hidráulicas en la bomba y, por consiguiente, para  $\eta_H$ , ya que esta magnitud depende de muchos factores cuya influencia todavía no se ha estudiado suficientemente. Para los rodetes de alta presión (lentas) los valores del rendimiento hidráulico cambian de 0,70 a 0,90, refiriéndose el límite inferior a valores reducidos de  $n_s$  y dimensiones pequeñas del rodete iguales a  $D = 100$  a 200 mm; y el límite superior corresponde  $n_s = 90$  a 120 y  $D = 500$  a 600 mm.

### § 57. Cálculo de la cavitación en las bombas centrífugas (según S. Rúdniev)

Toda bomba centrífuga, así como la de cualquier otro tipo, funciona normalmente sólo cuando la presión absoluta a su entrada no es demasiado reducida. En caso contrario, a la entrada de la bomba,

o más exacto, al entrar el líquido en los canales entre los álabes del rodete de trabajo, donde la presión absoluta es mínima, surge la cavitación (véase el § 21).

Durante la cavitación en la bomba se perturba la continuidad del flujo debido al desprendimiento de vapores y de gases disueltos; surge un ruido característico, debido a los choques hidráulicos al condensarse las burbujas del vapor, y también disminuye el suministro, la presión y el rendimiento de la bomba. La intensidad de estos fenómenos crece al ir disminuyendo la presión absoluta a la entrada del rodete

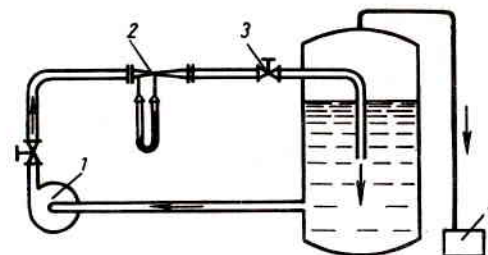


Fig. 149. Esquema de la instalación para probar las bombas: 1 — bomba a probar; 2 — fluidómetro; 3 — válvula; 4 — bomba de vacío

de trabajo, lo que se ve claramente en la curva característica de la cavitación en la bomba, la cual representa la dependencia de la presión, potencia y rendimiento de la bomba de la presión absoluta del líquido antes de entrar éste en el rodete. Tal característica se obtiene generalmente mediante un experimento especial durante el cual el número de revoluciones de la bomba, así como el gasto (estrangulado con la válvula o con la compuerta) queda invariable; durante el ensayo se hace disminuir gradualmente la presión absoluta a la entrada del rodete, por ejemplo, mediante la extracción del aire del recipiente <sup>1)</sup>. El esquema de la instalación para el experimento se muestra en la fig. 149. Al principio, la presión, la potencia y el rendimiento de la bomba quedan invariables (fig. 150), y después, cuando la presión disminuye considerablemente, aparece un ruido característico y las magnitudes indicadas decrecen mucho, debido a que a la entrada de la bomba surge la cavitación que va adquiriendo cada vez mayor intensidad.

El aumento del número de revoluciones de la bomba y del gasto del líquido (del suministro) lleva al aumento de la velocidad y a la caída de la presión absoluta a la entrada de los álabes del rodete, con-

<sup>1)</sup> La característica de cavitación también se puede obtener con la posición invariable de la llave o válvula, es decir, cuando el suministro de la bomba va disminuyendo debido a la cavitación.



tribuyendo, por consiguiente, al surgimiento de la cavitación en la bomba. Por eso, es necesario a veces limitar el gasto y el número de revoluciones de la bomba.

A continuación vamos a estudiar la corriente del líquido a la entrada del rodete, a determinar el diámetro de entrada del rodete de

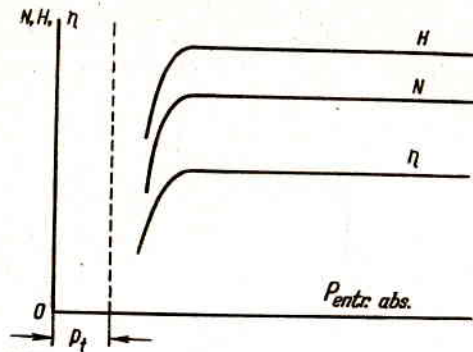


Fig. 150. Característica de cavitación de la bomba

trabajo, partiendo de las condiciones de cavitación. El criterio sobre la cavitación aquí es según el método del científico soviético S. Rúdniev.

Supongamos que a la entrada de la bomba la velocidad de movimiento del líquido sea igual a  $v_{entr.}$  y la presión absoluta,  $p_{entr.}$ , entonces, la energía específica del líquido, a la entrada de la bomba será igual a

$$H_{entr.} = \frac{p_{entr.}}{\gamma} + \frac{v_{entr.}^2}{2g}.$$

Al pasar el líquido a los álabes del rodete continúa disminuyendo la carga en una magnitud proporcional a la presión dinámica, calculada según la velocidad relativa a la entrada, pero la cavitación no surgirá mientras la presión absoluta del líquido sea mayor que la presión del vapor saturado a la temperatura dada.

De este modo, la condición que impide la cavitación en la bomba se puede expresar con la siguiente desigualdad:

$$H_{entr.} = \frac{p_{entr.}}{\gamma} + \frac{v_{entr.}^2}{2g} \geq h_t + \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{\omega_1^2}{2g};$$

donde  $v_1$  es la velocidad absoluta a la entrada del líquido en el álabe, aproximadamente igual a la velocidad a la entrada del rodete  $v_0$ ;

$\omega_1$  es la velocidad relativa en el mismo lugar;

$h_t$  es la presión del vapor saturado dividida por  $\gamma$ , o sea

$$h_t = \frac{p_t}{\gamma};$$

$\lambda$  es el coeficiente que depende de la forma del álabe, así como de las condiciones del paso del líquido;

$\lambda \frac{\omega_1^2}{2g}$  es la disminución de la presión al pasar el líquido al álabe.

Se puede expresar la misma desigualdad de otro modo:

$$H_{entr.} - h_t \geq \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{\omega_1^2}{2g}.$$

El miembro izquierdo de la desigualdad representa la energía específica disponible del líquido a la entrada de la bomba, la cual en el límite puede ser igual al miembro derecho. Dicha igualdad corresponderá al surgimiento de la cavitación, por eso, a la diferencia  $H_{entr.} - h_t$  la denominaremos crítica, si es igual al miembro derecho, o sea

$$(H_{entr.} - h_t)_{cr.} = \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{\omega_1^2}{2g}.$$

Puesto que generalmente  $\omega_1^2 = v_1^2 + u_1^2$ , entonces

$$(H_{entr.} - h_t)_{cr.} = (1 + \lambda) \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{u_1^2}{2g}.$$

Es preferible que la magnitud  $(H_{entr.} - h_t)_{cr.}$  sea lo menor posible, ya que mientras menor es  $(H_{entr.} - h_t)_{cr.}$ , más estable es la bomba respecto a la cavitación. Como se ve de lo expuesto, el valor de  $(H_{entr.} - h_t)_{cr.}$  depende de las velocidades  $v_1$  y  $u_1$ , las cuales, a su vez, siendo  $Q$  y  $n$  dados, dependen del diámetro  $D_1$  aproximadamente igual a  $D_0$  (véase la fig. 132). Ahora se nos plantea, cómo encontrar el diámetro de entrada del rodete de trabajo para asegurar el valor mínimo de  $(H_{entr.} - h_t)_{cr.}$ ? Para hallar la dimensión más ventajosa de  $D_1$  en cuanto a la cavitación, expresemos las velocidades  $v_1$  y  $u$  por  $D_1$  y examinemos su valor mínimo. Tendremos

$$(H_{entr.} - h_t)_{cr.} = \frac{1}{2g} \left[ (1 + \lambda) \frac{16Q^2}{\pi^2 D_1^4} + \lambda \frac{\pi^2 D_1^2 n^2}{60^2} \right].$$

Diferenciando con respecto a  $D_1$ , e igualando la derivada a cero tendremos

$$\frac{d}{dD_1} (H_{entr.} - h_t)_{cr.} = -4(1 + \lambda) \frac{16Q^2}{\pi^2 D_1^5} + 2\lambda \frac{\pi^2}{60^2} D_1 n^2 = 0,$$

de donde

$$D_{opt.} \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 60}{\pi^2}} \sqrt[6]{\frac{1 + \lambda}{\lambda}} \sqrt[3]{\frac{Q}{n}} = 3,25 \sqrt[6]{\frac{1 + \lambda}{\lambda}} \sqrt[3]{\frac{Q}{n}}.$$

Definitivamente obtendremos la siguiente expresión para el diámetro óptimo:

$$D_{opt.} = k_0 \sqrt[3]{\frac{Q}{n}}, \quad (12,43)$$

donde el coeficiente  $k_0$  se cambia, en función de  $\lambda$  entre los límites  $k_0 = 4,3 \div 4,5$ .

Tomando en consideración la posible sobrecarga de la bomba, se recomienda tomar el límite superior para los cálculos prácticos.

Aprovechando la expresión obtenida para el diametro óptimo, hallemos el valor mínimo de  $(H_{\text{entr.}} - h_t)_{\text{cr.}}$ :

$$[(H_{\text{entr.}} - h_t)_{\text{cr.}}]_{\text{mín.}} = \frac{D_{\text{ópt.}}^2}{2g} \left[ (1 + \lambda) \frac{16Q^2}{\pi^2 D_{\text{ópt.}}^8} + \lambda \frac{\pi^2}{60^2} n^2 \right],$$

o, después de sustituir, transformar y calcular

$$[(H_{\text{entr.}} - h_t)_{\text{cr.}}]_{\text{mín.}} = \frac{1}{20} \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{15}} \sqrt[3]{\lambda^2 (1 + \lambda)} \frac{Q^{2/3} n^{4/3}}{2g} = s \frac{(Qn^2)^{2/3}}{2g},$$

donde  $s$  es un coeficiente que se determina fácilmente por el valor  $\lambda$ ; si  $\lambda = 0,25$ ,  $s \approx 0,02$ .

Los experimentos con las bombas muestran que este valor del coeficiente  $s$  se puede aplicar en los cálculos prácticos para los rodetes de forma corriente. Para rodetes especiales, por ejemplo, con aumentada anchura de  $b_1$ , los valores de  $s$  disminuyen hasta 0,012 a 0,013.

Por lo tanto, si el diámetro de la entrada  $D_1$  es óptimo, la condición para que no haya cavitación en la bomba será la desigualdad siguiente:

$$H_{\text{entr.}} - h_t \geq s \frac{(Qn^2)^{2/3}}{2g}. \quad (12.44)$$

De este modo, el coeficiente obtenido  $s$  determina la cavitación en la bomba y permite efectuar cálculos de control y determinar el número máximo tolerable de revoluciones de la bomba, con  $Q$  y  $H_{\text{entr.}}$  dados, o la presión absoluta mínima tolerable a la entrada de la bomba.

Como se deduce de la designación adoptada más arriba y de la desigualdad anterior, esta presión absoluta se determina de la condición

$$(p_{\text{entr.}})_{\text{mín.}} = \gamma \left( H_{\text{entr.}} - \frac{v_{\text{entr.}}^2}{2g} \right) \geq \left[ s \frac{(Qn^2)^{2/3}}{2g} + h_t - \frac{v_{\text{entr.}}^2}{2g} \right] \gamma.$$

A menudo, la presión dinámica, entre paréntesis, se desprecia, ya que esto aumenta la seguridad del trabajo de la bomba en cuanto a la cavitación; la diferencia  $p_{\text{entr.}} - p_t$  se denomina reserva de cavitación de la presión.

Frecuentemente se emplea otro criterio que se denomina coeficiente de cavitación y que es igual a

$$\sigma = \frac{(H_{\text{entr.}} - h_t)_{\text{cr.}}}{H},$$

donde  $H$  es la presión que crea la bomba.

El coeficiente de cavitación  $\sigma$  es fácil de enlazarlo con el de rapidez de marcha de la bomba  $n_s$ .

De lo anterior hallamos

$$\sigma = \frac{(H_{\text{entr.}} - h_t)_{\text{cr.}}}{H} = \frac{s}{2g \cdot 3,65^{4/3}} \cdot \frac{(3,65n \sqrt{Q})^{4/3}}{H} = \frac{n_s^{4/3}}{C},$$

donde, siendo  $s = 0,02$ ,

$$C = \frac{2g \cdot 3,65^{4/3}}{s} \approx 5.500.$$

Para evitar la cavitación en la bomba se toman las siguientes medidas en los sistemas hidráulicos de aviones y en los motores cohete de combustible líquido:

a) aumentar la presión del gas en el depósito de donde se aspira el líquido. Pero esto puede provocar el aumento del peso de los depósitos, por eso, en los depósitos se emplea una presión comparativamente pequeña (de 1 a 3 at);

b) instalar una bomba de alimentación complementaria en el comienzo de la tubería de aspiración. Pero esto es posible sólo cuando al lugar donde se instala dicha bomba puede suministrarse una energía, por ejemplo, eléctrica, para su funcionamiento;

c) instalar directamente delante del rodete de trabajo principal, en el mismo árbol, una rueda axial o helicoidal (transportador helicoidal) que aumenta la presión y provoca remolinos en el flujo. La formación de remolinos trae consigo cierta disminución de la velocidad relativa  $w_1$  lo que también mejora las condiciones del funcionamiento del rodete de trabajo principal.

La rueda auxiliar mencionada es capaz de proteger completamente de la cavitación el rodete principal de la bomba, pero, teniendo el mismo número de revoluciones  $n$  y dejando pasar el mismo gasto  $Q$ , puede ser el lugar donde surja la cavitación. Por eso, el dispositivo más racional será aquél en el cual el número de revoluciones de la rueda auxiliar sea menor que el de la principal.

## § 58. Cálculo de la voluta espiral de la bomba

La voluta de la bomba centrífuga es un dispositivo que capta el líquido lanzado por el rodete y lo deriva a la tubería de presión.

El cálculo y el diseño de la caja se basa en la suposición de que la componente circunferencial de velocidad en la espiral cambia en proporción inversa al radio (ley de la distribución de la velocidad por la sección del torbellino, o ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento), o sea

$$v_u = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

donde  $\Gamma$  es la así llamada circulación de la velocidad por el perímetro cerrado que abarca el rodete; es una magnitud constante para la voluta dada y el régimen de trabajo dado de la bomba.

Al aumentar el radio, la velocidad  $v_u$  disminuye, y la presión crece del modo correspondiente. Así que cuando surge la corriente en la espiral, la energía cinética del líquido comienza a transformarse en energía de presión, continuando este proceso en el difusor que se encuentra habitualmente después de la espiral (fig. 251).



La circulación  $\Gamma$  puede hallarse fácilmente por la presión que crea la bomba  $H$  y según  $\eta_H$ . Efectivamente, puesto que por la fórmula (12.16)

$$H_{Tz} = \frac{u_2 v'_{2u}}{g} = \frac{\omega}{g} r_2 v'_{2u},$$

de donde basándose en lo expuesto anteriormente

$$\Gamma = 2\pi r_2 v'_{2u} = 2\pi \frac{g H_{Tz}}{\omega} = 2\pi \frac{g H}{\omega \eta_H}.$$

El gasto en cualquier sección de la espiral se puede considerar que crece proporcionalmente al ángulo de inclinación de la sección  $\alpha$ , contada a partir de la sección inicial de la espiral (que es también sección final), o sea

$$Q_\alpha = \frac{\alpha^\circ}{360} Q,$$

donde  $Q$  es la cantidad de líquido que suministra la bomba a la tubería.

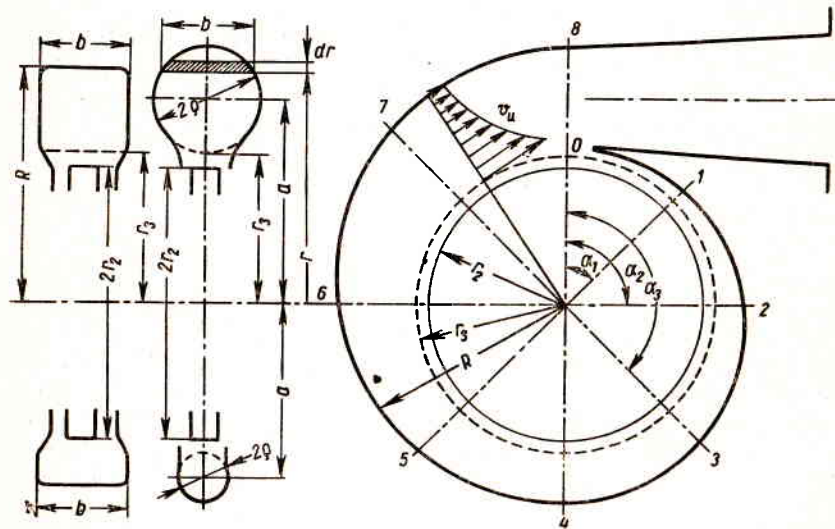


Fig. 151. Esquema de la caja espiral

Para el gasto elemental que pasa a través de una superficie cuya dimensión es  $b \times dr$ , tomada en cualquier sección de la espiral sobre el radio  $r$  (véase la fig. 151), tenemos

$$dQ_\alpha = b v_u dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} b dr,$$

de donde

$$Q_\alpha = \frac{\alpha^\circ}{360} Q = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{r=r_3}^{r=R} \frac{b}{r} dr,$$

donde  $r_3 = (1,03 \text{ a } 1,05) r^2$  es el radio de la superficie cilíndrica que abarca el rodete, la cual es tangente a las secciones de la caja espiral.

Para el caso más simple, cuando la espiral tiene sección rectangular de anchura constante ( $b = \text{const.}$ ), de la expresión anterior tendremos

$$\frac{\alpha^\circ}{360} = \frac{\Gamma}{2\pi Q} b \ln \frac{R}{r_3} = \frac{g b H}{\omega \eta_H Q} \ln \frac{R}{r_3}.$$

Adoptando varios valores del ángulo  $\alpha$  desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ , tendremos varios valores de  $R$ , desde  $r_3$  hasta la  $R_{\text{máx.}}$ , es decir, obtendremos los contornos de la espiral. Para la forma circular de la sección transversal de la espiral con radio variable tendremos

$$b = 2 \sqrt{\rho^2 - (r-a)^2}$$

$a$  es la distancia desde el centro de la sección hasta el eje del rodete y, por consiguiente,

$$Q_\alpha = \frac{\Gamma}{\pi} \int_{a-\rho}^{a+\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - (r-a)^2}}{r} dr = \Gamma (a - \sqrt{a^2 - \rho^2}).$$

Sustituyendo en la expresión obtenida  $Q_\alpha$  por  $\frac{\alpha^\circ}{360} Q$ , y  $a$  por  $r_3 + \rho$  después de resolver la ecuación respecto a  $\rho$  tendremos

$$\rho = \frac{\alpha^\circ}{360k} + \sqrt{\frac{2}{k} \frac{\alpha^\circ}{360} r_3}, \quad (12.45)$$

donde

$$k = \frac{\Gamma}{Q} = \frac{1\pi g H}{\omega \eta_H Q}.$$

La fórmula obtenida permite calcular todas las dimensiones y contornos de la voluta espiral de sección circular. Para una forma arbitraria de la sección hay que calcular mediante integración numérica.

### § 59. Selección del tipo de bomba. Particularidades de las bombas centrífugas que se emplean en la técnica de aviación y de cohetaría

La selección del tipo de la bomba y su diseño se realizan generalmente basándose en los siguientes datos de partida:  $Q$ ,  $H$  y  $n$ . Estas magnitudes permiten calcular el coeficiente  $n_s$ , el cual nos indica inmediatamente qué tipo de bomba de álabe se necesita para las condi-

ciones dadas. El orden del cálculo para diseñar una bomba centrífuga se expone en el ejemplo adjunto al presente capítulo.

Si de acuerdo con el cálculo,  $n_s$  se obtiene demasiado grande (por ejemplo, más de 1.200), esto significa que hace falta emplear no una bomba, sino varias bombas acopladas paralelamente.

Si, en cambio, el valor  $n_s$  resulta demasiado pequeño (véase el § 56), y es imposible aumentar el número de revoluciones  $n$ , hay que emplear una bomba de varias etapas, es decir, el acoplamiento de  $z$  rodets puestos sobre un árbol común. La presión que erea cada rodete será  $z$  veces menor, y  $n_s$  del rodete,  $z^{3/4}$  veces mayor que en la bomba de una etapa.

Si semejante acoplamiento no es deseable, se utiliza la bomba volumétrica rotativa. Pero en este caso hay que tener en cuenta las propiedades del líquido, tales como la viscosidad, la actividad química, etc.

En los aviones con motores de turbinas de gas, las bombas centrífugas, actualmente, se emplean principalmente en los sistemas de combustión en calidad de bombas de alimentación. Estas bombas se instalan generalmente en el interior de los depósitos de combustible o muy próximas a éstos y sirven para aumentar en cierto grado la presión en toda la tubería de aspiración. De este modo se mejoran las

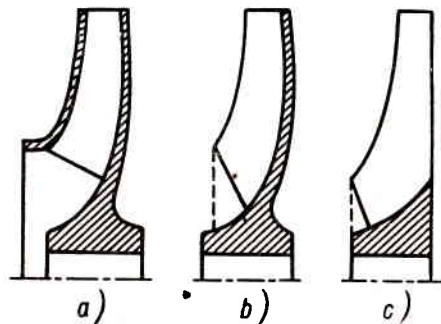


Fig. 152. Rodetes de trabajo:  
a — cerrado; b — semiabierto; c — abierto

condiciones de trabajo de la bomba de combustible principal y se excluye (o disminuye) la posibilidad de surgimiento en ésta de la cavitación.

Las bombas de alimentación se fabrican más a menudo con rodets tipo semiabierto, es decir, compuestos solamente de un disco con álabes dispuestos en uno de sus lados (fig. 152, b) <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Las particularidades de estos rodets de trabajo se expondrán a continuación.

En los casos en que la bomba de alimentación esté instalada en el interior del depósito, a la entrada del rodete de trabajo, sobre el mismo árbol se fija generalmente una rueda axial (impulsor), que sirve para mejorar las condiciones de trabajo de la bomba centrífuga de alimentación, y separar el líquido de los vapores y gases. La rueda axial se calcula para un suministro considerablemente mayor que la bomba centrífuga, porque una parte del líquido suministrado fluye a un lado.

Las bombas de alimentación trabajan generalmente entre  $(6-10) \times 10^3$  r. p. m. y crean una presión de 0,6 a 1,2 at. La velocidad característica de estas bombas oscila entre los límites de 100 a 200, es decir, vienen a ser bombas centrífugas normales o inclusive rápidas.

Actualmente se perfila la tendencia a emplear las bombas centrífugas en calidad de bombas principales para suministrar combustible en los motores de turbinas de gas. Esto está condicionado por el hecho de que crece el volumen necesario del combustible (gasto) y pueden utilizarse combustibles menos viscosos y con mayor vaporización. Al mismo tiempo hay posibilidad de emplear las bombas en caso de velocidades angulares bastante considerables (varias decenas de miles de r. p. m.).

En estas condiciones las bombas centrífugas aseguran el suministro necesario del combustible bajo una presión bastante alta, siendo menores las dimensiones y el peso que los de otros tipos de bombas. Las bombas indicadas presentan las mismas peculiaridades que las que se emplean en los motores cohete de combustible líquido.

En éstos últimos, las bombas centrífugas se emplean en gran escala para suministrar el combustible y el oxidante desde los depósitos a la cámara de combustión del motor. Estas bombas deben crear una presión suficiente para superar todas las resistencias en las tuberías y de la contrapresión en la cámara de combustión, así como para asegurar el gradiente necesario en los inyectores. Por lo tanto, la altura de presión necesaria aquí es muy considerable y se mide en centenares de metros, y la presión, en decenas de atmósferas.

Para obtener presiones tan altas, se emplean, generalmente, bombas volumétricas, pero, si se necesita suministrar simultáneamente un gasto considerable (como tiene lugar en los motores cohete de combustible líquido), y es posible emplear un mando con gran número de revoluciones, por ejemplo, de una turbina de gas, entonces la aplicación de la bomba centrífuga resulta mucho más práctica.

La gran presión de la bomba centrífuga se obtiene con gran número de revoluciones del rodete de trabajo, así como empleando una construcción especial del mismo. Como se deduce del § 55, esta construcción es propia para las bombas centrífugas lentas, es decir, para las bombas con valor mínimo de la velocidad característica (número específico de revoluciones  $n_s$ ).

Hay que tener en cuenta, que el término «lenta» señala un valor reducido del número específico de revoluciones y no está ligado con



el número real (de trabajo) de revoluciones de la bomba, que puede ser muy grande.

De este modo, la particularidad principal de las bombas centrífugas que se emplean en los motores cohete de combustible líquido consiste en un valor bastante reducido de  $n_s$ , con todas las consecuencias que se derivan de esto (véase los §§ 55 y 56).

Por esto, los rodets de trabajo de los motores cohete de combustible líquido son por lo general exclusivamente radiales, es decir, cuando el líquido fluye en el plano radial, normal al eje de rotación. Para estos rodets es propio un gran valor del diámetro relativo  $\frac{D_2}{D_1}$  y pequeña

anchura relativa del rodete  $\frac{b_2}{D_2}$ . Como se ha indicado en el § 56, la disminución de  $n_s$  trae consigo el aumento de las pérdidas relativas de energía por la fuga del líquido en el interior de la bomba (pérdidas volumétricas) y por rozamiento del disco del rodete contra el líquido, es decir, la disminución de los coeficientes  $\eta_0$  y  $\eta_M$  y, por consiguiente, del rendimiento total de la bomba. Por eso, las bombas centrífugas de los motores cohete de combustible líquido tienen habitualmente un rendimiento pequeño.

Los rodets de trabajo de las bombas centrífugas de los motores cohete de combustible líquido pueden ser de tipo corriente cerrado, es decir, con dos discos, unidos entre sí por medio de álabes (fig. 152, a), o bien, de tipo semiabierto, con un disco (fig. 152, b), y, por último, de tipo abierto, sin discos, con álabes de ménsula (fig. 152, c). En los dos primeros casos se emplea ventajosamente el álabe doblado hacia atrás ( $\beta_2 < 90^\circ$ ), y en el tercero, los álabes se hacen radiales, para que sean más sólidos. En los rodets de tipo semiabierto, y tanto más, de tipo abierto, las pérdidas de potencia por fricción de disco son considerablemente menores que en los de tipo cerrado, pero crecen las pérdidas volumétricas.

El método para calcular la potencia relativa de rozamiento  $\frac{N_{roz.}}{N_h}$  expuesto en el § 56 es aplicable también para los rodets de tipo semiabierto, pero seleccionando del modo correspondiente el coeficiente  $k$  en la fórmula para  $N_{roz.}$ . La determinación de las pérdidas volumétricas en este caso es un problema particular.

Otra peculiaridad de las bombas centrífugas, que se emplean en los motores cohete de combustible líquido, consiste en que éstas trabajan por lo común a regímenes próximos a los de cavitación, debido a los grandes números de revoluciones. Por eso, el cálculo de cavitación de las bombas, examinado más arriba, adquiere una importancia particular.

**Ejemplo.** Calcular (en la primera aproximación) las dimensiones del rodete de trabajo de la bomba centrífuga del motor del cohete V-2 y determinar la presión necesaria a la entrada de la bomba, partiendo de la condición de que no exista la cavitación y de acuerdo con los datos siguientes:

Líquido que se impele, alcohol etílico (75%);  $\gamma = 864 \text{ kg/cm}^3$ ;  $h_t = 44 \text{ mm}$  de la columna de mercurio.

Gasto de peso (suministro de la bomba)  $G = 56 \text{ kg/seg}$ .

Presión que crea la bomba,  $p_{bomba} = 20,7 \text{ at}$ .

Número de revoluciones del rodete de trabajo,  $n = 3.800 \text{ r. p. m.}$

**Solución.** 1. Se determina el gasto volumétrico  $Q$ , la presión de la bomba  $H$  y  $n_s$ :

$$Q = \frac{G}{\gamma} = \frac{56}{864} = 0,065 \text{ m}^3/\text{seg}; \quad H = \frac{p_{bomba}}{\gamma} = \frac{20,7 \cdot 10^4}{864} = 240 \text{ m};$$

$$n_s = 3,65 \frac{n \sqrt{Q}}{H^{3/4}} = 3,65 \frac{3.800 \sqrt{0,065}}{240^{3/4}} \approx 60.$$

2. De acuerdo con el valor  $n_s$  y los datos estadísticos (véase los §§ 55 y 56) apreciamos aproximadamente los siguientes valores:

$$\frac{D_2}{D_1} = 2,5; \quad \beta_2 = 30^\circ; \quad \eta_v = 0,88; \quad \eta'_M = 0,92; \quad \eta''_M = 0,97; \quad \eta_H = 0,85;$$

de donde

$$\eta = 0,88 \cdot 0,92 \cdot 0,97 \cdot 0,85 = 0,67.$$

3. La potencia que consume la bomba

$$N_0 = \frac{Q \gamma H}{75 \eta} = \frac{0,065 \cdot 240 \cdot 864}{75 \cdot 0,67} = 268 \text{ C. V.}$$

4. El gasto del líquido que pasa a través del rodete

$$Q' = \frac{Q}{\eta_v} = \frac{0,065}{0,88} = 0,074 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

5. El diámetro óptimo del orificio de entrada del rodete  $D_{opt.}$ , según la fórmula (12.43)

$$D_{opt.} = k_0 \sqrt[3]{\frac{Q'}{n}} = 4,5 \sqrt[3]{\frac{0,074}{3.800}} = 0,120.$$

Se obtiene el así llamado diámetro reducido sin tomar en consideración la compresión del flujo por el casquillo del rodete. Tomando en cuenta la igualdad de las superficies el diámetro  $D_0$  resulta un poco mayor, a saber

$$D_0 = \sqrt{D_{opt.}^2 - d_{casq.}^2}$$

donde  $d_{casq.}$  es el diámetro del casquillo, igual a

$$d_{casq.} = (1,15 - 1,25) d_{arb.}$$

$d_{arb.}$  es el diámetro del árbol determinado en cuanto a la solidez.

Si no se realiza aquí el cálculo del árbol en cuanto a la solidez, supongamos que  $D_0 \approx 140 \text{ mm}$ . El diámetro  $D_1$  será igual o algo menor que  $D_0$ , debido a la inclinación de la arista de entrada del álabe.

6. Tomando la relación entre las velocidades radiales  $\frac{v_{2r}}{v_{1r}}$  igual a 1,0 y  $v_0 \approx v_{1r}$ , tendremos

$$v_{2r} = v_0 = \frac{4Q'}{\pi D_{\text{opt}}^2} = \frac{4 \cdot 0,074}{\pi 0,12^2} = 6,5 \text{ m/seg.}$$

7. El coeficiente de influencia del número de álabes lo hallamos por la fórmula (12.19), tomando (previamente)  $z = 7$ :

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{2(0,6 + 0,6 \cdot 0,5)}{7(1 - 0,16)} = 1,30,$$

de donde  $\mu = 0,77$ .

8. La presión teórica, siendo  $z = \infty$ , según la fórmula (12.21')

$$H_{t\infty} = \frac{H}{\mu \eta_H} = \frac{240}{0,77 \cdot 0,85} = 367 \text{ m.}$$

9. Sustituyendo en la ecuación (12.12) la relación  $Q \cdot 2\pi r_2 b_2$  por  $v_{2r}$  y resolviéndola como una ecuación de segundo grado, tendremos

$$u_2 = \frac{v_{2r}}{2 \operatorname{tg} \beta_2} + \sqrt{\frac{v_{2r}^2}{4 \operatorname{tg}^2 \beta_2} + g H_{t\infty}} = \frac{6,5}{2 \cdot 0,578} + \sqrt{\frac{6,5^2}{4 \cdot 0,578^2} + 9,81 \cdot 367} = 65,5 \text{ m/seg,}$$

de donde

$$D_2 = \frac{60 u_2}{\pi n} = \frac{60 \cdot 65,5}{\pi 3.800} = 0,33 \text{ m.}$$

10. La anchura del canal del rodete a la entrada, contando con el coeficiente de compresión del flujo por los álabes, el cual tomamos igual a  $\psi = 0,95$ , es

$$b_2 = \frac{Q'}{\pi D_2 v_{2r} \psi_2} = \frac{0,074}{\pi 0,33 \cdot 6,5 \cdot 0,95} = 0,012 \text{ m} = 12 \text{ mm.}$$

11. La anchura del canal del rodete a la entrada (siendo  $\psi_1 = 0,85$ ), es

$$b_1 = \frac{Q'}{\pi D_1 v_{1r} \psi_1} = \frac{0,074}{\pi 0,14 \cdot 6,5 \cdot 0,85} = 0,03 \text{ m} = 30 \text{ mm}$$

12. El ángulo de inclinación del álabe a la entrada, partiendo de la condición de la entrada del líquido sin choque es,

$$\beta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_{1r}}{u_1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{6,5 \cdot 330}{65,5 \cdot 140} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,23 = 13^\circ.$$

Generalmente el ángulo calculado  $\beta_1$  es aumentado de  $3^\circ$  a  $5^\circ$  por consideraciones de cavitación en caso de sobrecarga en el gasto.

13. Después se hace la precisión de las dimensiones del rodete, es decir, el recuento en el mismo orden, pero basándose en los valores  $\beta_2$  y  $z$  elegidos definitivamente, así como con valores más precisos de los coeficientes  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ .

Estos se calculan según las siguientes fórmulas

$$\psi_1 = 1 - \frac{z\delta}{\pi D_1 \operatorname{sen} \beta_1}$$

y

$$\psi_2 = 1 - \frac{z\delta}{\pi D_2 \operatorname{sen} \beta_2},$$

donde  $\delta$  es el espesor del álabe.

14. La dimensión de la sección final de la caja espiral (radio  $\rho$ ), según la fórmula (12.45), siendo  $\alpha = 360^\circ$  (tomando a  $r_3 = 1,05$  y  $r_2 = 173 \text{ mm}$ )

$$\rho_{360} = \frac{1}{k} + \sqrt{\frac{2}{k} r_3} = \frac{\omega \eta_H Q}{2\pi g H} + \sqrt{\frac{2\omega \eta_H Q}{2\pi g H} r_3} = \frac{398 \cdot 0,85 \cdot 0,065}{2\pi 9,81 \cdot 240} + \sqrt{\frac{398 \cdot 0,85 \cdot 0,065}{\pi 9,81 \cdot 240} 0,173} = 0,023 \text{ m.}$$

15. La presión necesaria a la entrada del rodete según la fórmula (12.44) es

$$H_{\text{entr.}} = h_t + s \frac{(Qn^2)^{2/3}}{2g} = 0,044 \frac{13.600}{864} + 0,02 \frac{(0,065 \cdot 3,82 \cdot 10^6)^{2/3}}{19,6} = 10,5 \text{ m}$$

o, despreciando la presión dinámica,

$$p_{\text{entr.}} = 10,5 \cdot 864 \cdot 10^{-4} = 0,91 \text{ kg/cm}^2.$$



## Bombas volumétricas rotativas

### § 60. Generalidades

La transformación de la energía mecánica del mando en la del flujo del líquido se diferencia sustancialmente en la bomba volumétrica de la transformación en la bomba con álabes.

**Bomba volumétrica** es la bomba en la cual la transformación de la energía se realiza en el proceso del desalojamiento periódico del líquido de las cámaras de trabajo por los desplazadores. La cámara de trabajo de la bomba volumétrica es el espacio, en el camino del movimiento del líquido, que se cierra periódicamente, es decir, se aísla tanto de la cavidad de aspiración (de recepción) de la bomba, como de la de descarga. El desplazador es un órgano móvil de la bomba, el cual expulsa directamente el líquido de la cámara de trabajo.

De este modo, el funcionamiento de la bomba volumétrica consiste en el paso periódico de determinados volúmenes de líquido (porciones) de la cavidad de aspiración a la de descarga de la bomba con el aumento simultáneo de la presión. Por consiguiente, el paso del líquido por la bomba volumétrica, a diferencia del paso por la de álabes, es siempre más o menos irregular, por lo cual se considera generalmente el promedio del paso del líquido en el tiempo.

Otra particularidad de la bomba volumétrica consiste en que la cavidad de aspiración está siempre aislada herméticamente de la de descarga. Se sobreentiende no la hermeticidad absoluta, sino la práctica, es decir, la que admite la posibilidad del paso insignificante del líquido (filtración) a través de holguras pequeñas en la bomba.

El principio de funcionamiento de la bomba volumétrica indicado más arriba permite establecer la siguiente expresión para el promedio del paso del líquido teórico por segundo:

$$Q_T = \frac{wzn}{60} = \frac{Wn}{60} \left[ \frac{m^3}{seg} \right], \quad (13.1)$$

donde  $W$  es el volumen característico del líquido que se desaloja periódicamente por un desplazador o su elemento por una revolución del árbol de la bomba;

$z$  es el número de estos volúmenes que pasan durante una revolución del árbol de la bomba;

$W$  es el volumen de trabajo de la bomba, es decir, el paso teórico del líquido durante una revolución del árbol de la bomba.

Se entiende por el paso teórico el del líquido incompresible, siendo absolutamente nulas las fugas a través de holguras y, cuando la bomba trabaja normalmente, sin cavitación (véase el § 57).

Según el carácter del desalojamiento del líquido, las bombas volumétricas se dividen en dos clases; las de émbolo y las rotativas.

**La bomba de émbolo** es una bomba volumétrica, en la cual el líquido se desaloja sólo por medio del movimiento de vaivén (o recuperador giratorio) del desplazador. En las bombas de émbolo el movimiento de vaivén de los desplazadores se realiza más a menudo mediante los mecanismos de biela y cigüeñal, pero se emplean también otros (de levas, excéntricos, etc.).

A la clase de bombas de émbolo pertenecen también las chupadoras, de diafragma y otras del mismo carácter de desalojamiento.

Para las bombas de émbolo es propia la presencia de válvulas de aspiración y de impulsión que regulan el movimiento del líquido a través de la cámara de trabajo. Estas válvulas son generalmente de auto-acción y el grado de su apertura se determina solamente por la acción del flujo del líquido.

Las bombas de émbolo son capaces de crear presiones sumamente altas que llegan a decenas e inclusive a centenares de atmósferas, pero pueden trabajar solamente con pequeños números de revoluciones, de 250 a 500 r.p.m. Por eso, las dimensiones de la bomba de émbolo resultan considerablemente mayores que las de la bomba centrífuga de la misma potencia.

Las bombas de émbolo, en forma de potentes unidades con mando mecánico, se emplean ahora principalmente en la industria del petróleo y química para transportar líquidos de alta viscosidad, así como en las plantas termoeléctricas para alimentar las calderas de vapor; en forma de pequeñas bombas manuales se emplean en distintas esferas. En el abastecimiento de agua y en varias otras ramas de la técnica, las bombas de émbolo han sido sustituidas por las centrífugas y las rotativas.

**La bomba rotativa** es una bomba volumétrica, en la cual el líquido es desalojado debido al movimiento rotatorio o giratorio de avance de los desplazadores.

La bomba rotativa está compuesta de las siguientes partes principales: estator, rotor y uno o varios desplazadores. El estator es el cuerpo fijo de la bomba, el rotor, la parte giratoria de la bomba acoplada directamente con el árbol motriz. La definición del desplazador ha sido dada más arriba. En las bombas rotativas el desplazador puede tener diferentes formas, como se mostrará más adelante.

El trabajo de la bomba rotativa consiste en lo siguiente: primeramente, el líquido llena la cámara de trabajo de la cavidad de aspiración



de la bomba, después se aíslan herméticamente (se cierran) las cavidades de aspiración y de descarga de la bomba y, por fin, el líquido se expulsa de la cámara de trabajo a la línea de expulsión o descarga. Al mismo tiempo, la cámara de trabajo se traslada con el líquido de la cavidad de aspiración a la de impelencia, lo que se realiza gracias al movimiento rotatorio del rotor. Precisamente este paso de la cámara de trabajo con el líquido es lo más característico del proceso de trabajo de la bomba rotativa.

La particularidad esencial en la construcción de las bombas rotativas es la ausencia de válvulas de aspiración y de impulsión (no hay necesidad de ellas) y, ligado con esta particularidad, éstas, pueden trabajar en calidad de motores hidráulicos (véase el capítulo XIV). Además, en las bombas rotativas no hay mecanismos de biela y cigüeñal que son indispensables en las de émbolo.

Las particularidades mencionadas de las bombas rotativas permiten emplearlas con grandes números de revoluciones, que alcanzan de 3 a 5 mil r. p. m. y más, lo que supera en mucho los admisibles para las bombas de émbolo con válvulas.

El paso teórico de las bombas rotativas, lo mismo que de otras bombas volumétricas, se determina por la fórmula (13.1). Pero las bombas rotativas difieren, además, en que el número de volúmenes característicos  $z$ , que se suministran durante una revolución del árbol, es considerablemente mayor que en las de émbolo; si para las bombas de émbolo  $z = 1$  a 3, en las rotativas  $z = 4$  a 12 y más.

Además, los volúmenes característicos indicados más arriba no son suministrados por la bomba rotativa en consecución estricta, uno tras otro, sino con cierta superposición, es decir, de modo que cuando un volumen todavía no ha sido suministrado completamente, comienza el suministro del siguiente, después el tercero, etc. (para más detalle, véase el § 61). De aquí se deriva que las bombas rotativas aseguran un suministro más uniforme del líquido que las de émbolo.

Las ventajas citadas aseguran su aplicación en gran escala en distintas esferas de la técnica, incluyendo la de aviación. En los aviones, las bombas rotativas se emplean para suministrar el combustible y el lubricante al motor, así como en los sistemas de transmisiones hidráulicas (véase el capítulo XIV).

La clasificación de las bombas rotativas se basa en el principio siguiente: según el carácter de movimiento de los desplazadores, las bombas rotativas se dividen en dos subclases: 1) bombas rotativas con movimiento rotatorio de los desplazadores y 2) bombas rotativas con movimiento giratorio de avance de los desplazadores.

La primera subclase de bombas rotativas se divide en dos tipos: de engranaje y helicoidales, según el carácter del movimiento del líquido que se expulsa de la bomba.

La bomba de engranaje interior es una bomba rotativa, en la cual el desplazador realiza sólo un movimiento rotatorio y el líquido que

se desaloja se desplaza a lo largo de los ejes de rotación del rotor y del desplazador.

La bomba helicoidal es una bomba rotativa, en la cual el desplazador realiza sólo un movimiento rotatorio y el líquido que se desaloja se desplaza a lo largo de los ejes de rotación del rotor y de los desplazadores.

La segunda subclase de las bombas de rotor, a su vez, se divide, según cómo se cierra el volumen desalojado, en dos tipos: las de aletas y las rotativas de émbolo.

La bomba de aletas es una bomba rotativa, en la cual los desplazadores realizan un movimiento giratorio de avance, y los volúmenes de líquido que se expulsan se encierran entre los dos desplazadores vecinos y las superficies del rotor y del estator.

La bomba rotativa de émbolo es una bomba rotativa, en la cual los desplazadores realizan un movimiento giratorio de avance, y los volúmenes del líquido que se expulsan se encierran por los desplazadores en las cavidades cilíndricas del rotor.

En el párrafo siguiente se dan los esquemas de las bombas rotativas y se examina más detalladamente su trabajo.

#### § 61. Variedades de las bombas volumétricas rotativas

Examinemos los esquemas de acción de cada una de las variedades de las bombas rotativas y obtengamos las fórmulas para el cálculo del promedio del paso teórico. El suministro real de dichas bombas se tratará después.

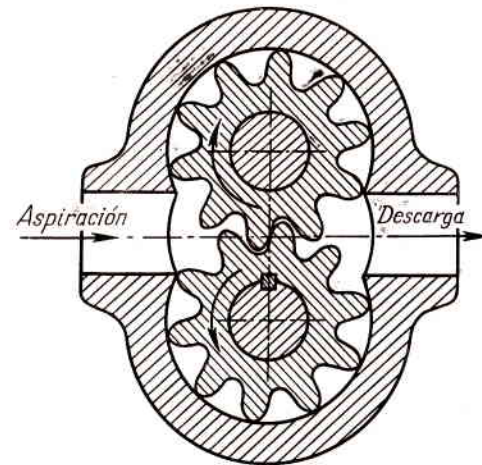


Fig. 153. Esquema de una bomba rotativa de engranaje interior

La bomba de engranaje interior (fig. 153), por lo general, tiene la forma de dos ruedas dentadas iguales con perfil evolvente bien ajusta-



das al cuerpo de la bomba. El rotor es la rueda conductora, el desplazador, la conducida, o al contrario, es decir, son intercambiables. En la cavidad de aspiración de la bomba, el líquido llena los espacios entre los dientes de ambos piñones y después estos volúmenes se encierran (se aíslan) y se desplazan por los arcos de las circunferencias a la parte de descarga de la bomba.

Al engranar todo diente de cada piñón entra en el intersticio que le corresponde y desaloja del mismo al líquido. Puesto que el volumen del intersticio es mayor que el del diente, en el lugar de engrane, cierta cantidad de líquido retorna a la cavidad de aspiración.

Por consiguiente, en el caso dado, es más justo considerar como volumen característico  $w$  (véase el § 59), el del diente, es decir,  $w = w_{\text{diente}}$  y no el del intersticio. El número de estos volúmenes, que pasan durante una vuelta completa del árbol del rotor, es igual al número total de dientes de los dos piñones ( $2z$ ). Por eso, el promedio del paso teórico por segundo será igual a

$$Q_T = \frac{2zw_{\text{diente}}n}{60} \left[ \frac{m^3}{\text{seg}} \right]. \quad (13.2)$$

Puesto que el cálculo del volumen  $w_{\text{diente}}$  está ligado con la necesidad de medir la superficie del diente, a menudo se emplea la siguiente fórmula aproximada, obtenida suponiendo el paso de una capa continua de líquido de  $2h = 2m$  de espesor, anchura  $b$ , con velocidad igual a la de rotación de la rueda  $u$  en la circunferencia inicial, es decir,

$$Q_T = uS = \frac{2\pi Rn}{60} 2hb = \frac{1}{15} \pi Rnbm \left[ \frac{m^3}{\text{seg}} \right], \quad (13.3)$$

donde  $S$  es la superficie de la sección transversal de la capa de líquido igual a

$$S = 2hb;$$

$h$  es la altura del cabezal del diente igual al módulo  $m$ ;  $R$  es el radio de la circunferencia inicial.

La bomba helicoidal trabaja según el mismo principio que la de engranaje, pero se diferencia en que dispone de una cinemática espacial. Tiene ventajas considerables: el suministro es absolutamente regular, admite la aplicación de números elevados de revoluciones y otras, sin embargo, hasta ahora no ha adquirido difusión en la técnica de aviación.

La **bomba de aletas** se aplica, particularmente, en la aviación, en forma de un conjunto de cuatro aletas con cinemática plana (fig. 154). El rotor es un cilindro hueco con ranuras radiales, en las cuales están ajustadas las aletas. El rotor va dispuesto de modo excéntrico respecto a la superficie interior del estator, debido a lo cual, las aletas, durante la rotación del rotor, realizan desplazamientos de vaivén respecto al rotor. Bajo la acción de las fuerzas centrífugas, las aletas se aprietan con sus extremos libres a la superficie interior del estator y se deslizan

por ésta, y con los extremos interiores se desplazan por el así llamado árbol flotante sin cojinetes.

El líquido llena el espacio entre dos aletas vecinas, el cual aumenta durante el giro del rotor, y después, al alcanzar el valor máximo, se cierra. Más tarde, el líquido que llena este espacio, en una cantidad igual al volumen  $w$  típico para la bomba dada, es empujado a la parte de descarga de la bomba.

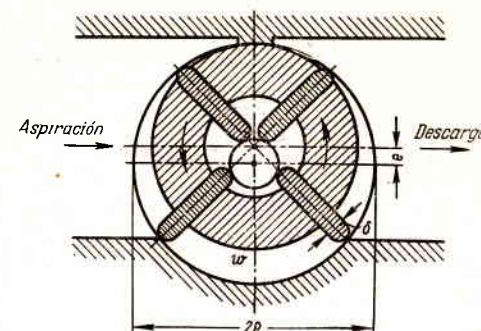


Fig. 154. Esquema de una bomba de aletas

Designemos:

- $R$ , radio de la superficie interior del estator;
- $e$ , excentricidad, es decir, la distancia entre los centros del rotor y del estator;
- $z$ , número de aletas;
- $b$ , dimensión axial de las aletas;
- $\delta$ , espesor de la aleta.

Entonces, el volumen característico se puede expresar aproximadamente del modo siguiente:

$$w = 2eb \left[ \frac{2\pi(R-e)}{z} - \delta \right],$$

y el paso teórico medio por segundo, según la fórmula (13.1), será igual a

$$Q_T = \frac{wzn}{60} = 2eb [2\pi(R-e) - z\delta] \frac{n}{60} \left[ \frac{m^3}{\text{seg}} \right]. \quad (13.4)$$

Las **bombas rotativas de émbolo** se emplean tanto con cinemática plana, como espacial. Las primeras, que se denominan bombas radiales de émbolo, tienen un rotor excéntrico respecto al estator y provisto de alojamientos (fig. 155). Los chupones instalados en estos alojamientos, que desempeñan el papel de desplazadores, al girar el rotor, realizan un movimiento de vaivén respecto a éste, deslizando sus extremos por la superficie interior del estator. El deslizamiento se sustituye a menudo por el balanceo de rodillos especiales.

Los alojamientos del rotor se comunican a través de orificios radiales alternativamente con las mitades izquierda y derecha del orificio central dividido con un tabique vertical en dos cámaras. La cámara izquierda en la fig. 155 es de aspiración, la derecha, de descarga; de la primera, el líquido es aspirado a los alojamientos y después es empujado por los pistones a la segunda cámara, la de descarga.

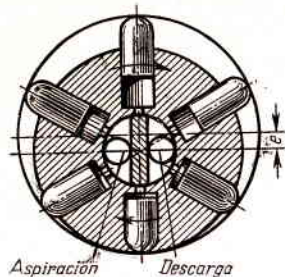


Fig. 155. Esquema de una bomba radial de émbolo

Para la bomba dada el volumen característico es el que da cada chupón, o sea

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} 2e,$$

donde  $d$  es el diámetro de los chupones;  
 $e$  es la excentricidad.

El paso teórico medio por segundo, con el número de chupones igual a  $z$ , es igual a

$$Q_T = \frac{\pi d^2 e z n}{120} \left[ \frac{m^3}{seg} \right]. \quad (13.5)$$

Las bombas rotativas de émbolo con cinemática espacial se hacen con la arandela inclinada o con el bloque (rotor) inclinado. Uno de

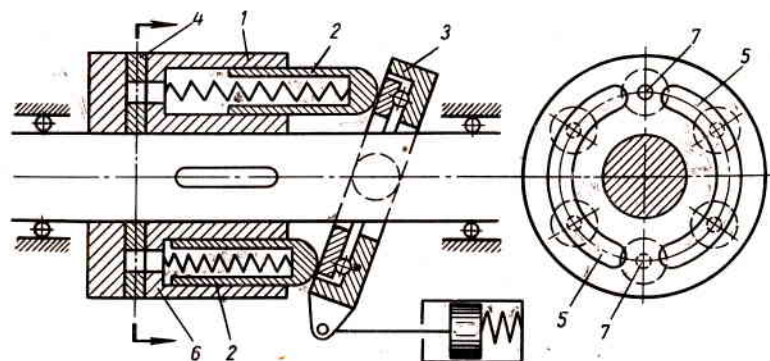


Fig. 156. Esquema de una bomba rotatoria de émbolo con arandela inclinada

los esquemas posibles del primer tipo de éstas se muestra en la fig. 156. Es rotor de la bomba 1 tiene alojamientos paralelos al eje de rotación. Los chupones 2, que se desplazan de sus alojamientos por los muelles, deslizan sus extremos (o más bien, ruedan) por el disco (arandela) inclinado y fijo 3, el cual hace entrar después a los chupones en sus alojamientos. De este modo, se realiza el movimiento de vaivén de los chupones y, por consiguiente, la aspiración y la descarga. En la parte fija de la bomba 4, a la cual está adherido el rotor con su cara, hay dos

ranuras 5 en forma de arcos, una de las cuales se comunica con la línea aspirante, y la otra, con la de descarga. Al girar el rotor, los orificios 6 se desplazan por las ranuras 5 y, por consiguiente, unen los alojamientos alternativamente con la línea aspirante y con la de descarga. En los momentos cuando los orificios se encuentren en los puentes 7, el volumen de líquido se encierra en el alojamiento, siendo máximo en la posición superior y mínimo, en la inferior.

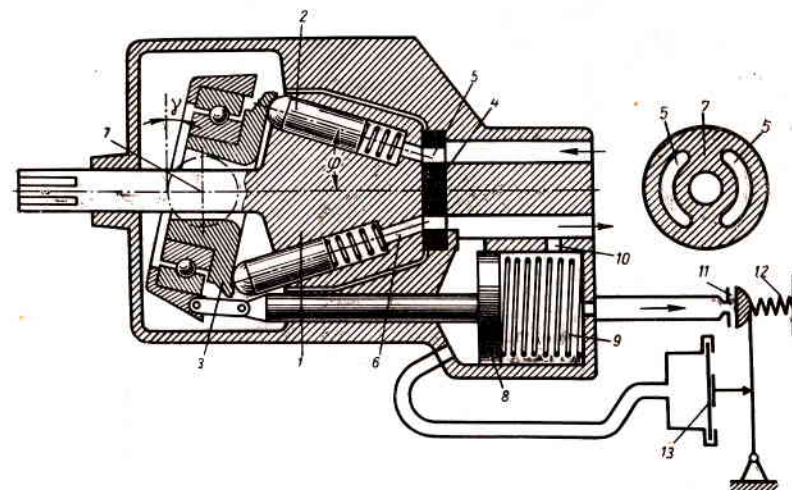


Fig. 157. Esquema de una bomba rotatoria de émbolo regulable con arandela  
1 — rotor; 2 — chupones; 3 — arandela inclinada; 4 — distribuidor; 5 — ranuras; 6 — perforaciones; 7 — puentes; 8 — émbolo; 9 — muelle; 10 — pulverizador; 11 — válvula; 12 — muelle; 13 — membrana

La arandela inclinada está fijada por medio de una charnela de modo que se puede hacerla girar alrededor del eje, que intersecta el eje del rotor bajo un ángulo recto, y que se pueda cambiar el ángulo de inclinación de la arandela  $\gamma$ .

El paso teórico medio por segundo de la bomba examinada es igual a

$$Q_T = \frac{\pi d^2}{4} l z \frac{n}{60} = \frac{\pi d^2}{4} D t g \gamma z \frac{n}{60}, \quad (13.6)$$

donde  $D$  es el diámetro de la circunferencia del rotor en la cual van dispuestos los ejes de los cilindros;

$d$  es el diámetro de los chupones;

$z$  es el número de chupones;

$l$  es el recorrido del chupón.

A menudo, en la bomba con arandela inclinada, los chupones no se disponen paralelamente al eje del rotor, sino a cierto ángulo  $\varphi$  (fig. 157). En este caso, los chupones son desplazados de sus alojamientos no sólo por los muelles, sino por las componentes de las fuerzas



centrífugas, que actúan sobre estos chupones cuando gira el rotor, lo que permite disminuir las dimensiones de los muelles.

El recorrido del chupón  $l$  puede ser determinado geométricamente, suponiendo que cada chupón tiene contacto con la arandela en un punto

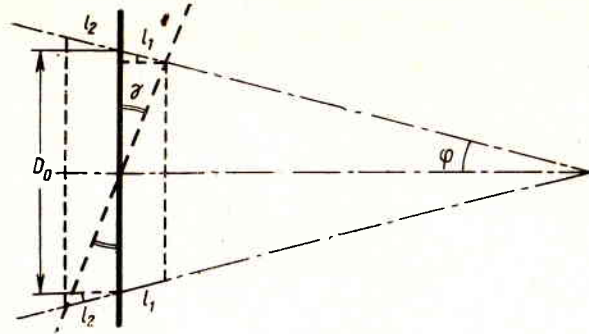


Fig. 158. Esquema para determinar el suministro de la bomba

que se encuentra en el eje del mismo (véase la fig. 158). Basándose en esto, y aplicando el teorema de los senos, tendremos

$$\frac{l_1}{\sin \gamma} = \frac{D_0}{2 \sin (90^\circ - \gamma + \varphi)}$$

$$\frac{l_2}{\sin \gamma} = \frac{D_0}{2 \sin (90^\circ - \gamma - \varphi)},$$

donde  $D_0$  es el diámetro de la circunferencia, por la cual están dispuestos los puntos de contacto de los chupones con la arandela, siendo  $\gamma = 0$ .

De aquí que el recorrido del chupón es igual a

$$l = l_1 + l_2 = \frac{D_0}{2} \sin \gamma \left[ \frac{1}{\cos (\varphi - \gamma)} + \frac{1}{\cos (\varphi + \gamma)} \right].$$

El paso teórico medio por segundo se determinará por la expresión

$$Q_T = \frac{\pi d^2}{4} l \frac{zn}{60} = \frac{1}{480} \pi d^2 D_0 zn \sin \gamma \left[ \frac{1}{\cos (\varphi - \gamma)} + \frac{2}{\cos (\varphi + \gamma)} \right]. \quad (13.7)$$

Siendo  $\varphi = 0$ , la expresión obtenida se convierte en la fórmula dada anteriormente (13.6).

El esquema de la bomba rotativa de émbolo con bloque inclinado se muestra en la fig. 159. La rotación se transmite del árbol motriz al rotor (bloque) a través de la articulación cardán, que permite cambiar el ángulo entre los ejes del árbol y del rotor. El rotor está ubicado en una cuna oscilante, en el fondo de la cual hay dos ranuras en forma de arcos (la de aspiración y la de descarga). Los pistones están unidos con el disco del árbol motriz por medio de vástagos provistos de charnelas.

Más arriba se ha señalado, que las bombas volumétricas rotativas siempre suministran el líquido con cierta irregularidad. El estudio de la cinemática de los mecanismos de las bombas rotativas de émbolo muestra que la velocidad relativa de desplazamiento de los chupones, igual que en el caso de un mecanismo corriente de biela y cigüeñal, se puede considerar aproximadamente proporcional al seno del ángulo de giro del rotor  $\alpha$ . De acuerdo con la misma ley senoidal, el suministro del líquido con un chupón cambia en función del ángulo  $\alpha$  y del tiempo  $t$ . El suministro (total) de todos los chupones de la bomba, puede ser hallado sumando las ordenadas de los senoides indicados (fig. 160).

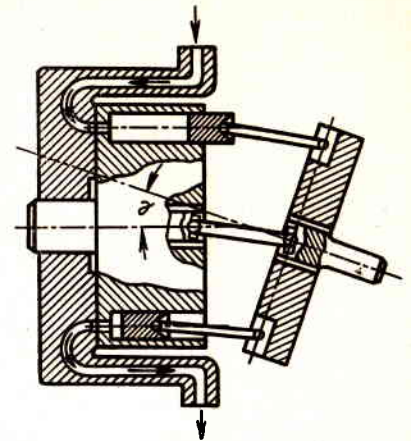


Fig. 159. Esquema de una bomba rotatoria de émbolo con bloque inclinado

El grado de irregularidad de suministro disminuye con el aumento del número de desplazadores (de chupones, pistones o aletas) de la bomba. Ha de señalarse que se obtiene un suministro mucho más uniforme con número impar de desplazadores, razón por la cual, en las bombas rotativas de émbolo, el número  $z$  suele ser 5, 7 ó 9.

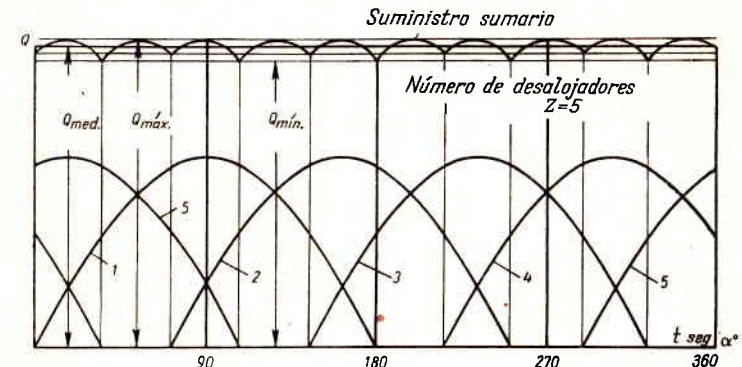


Fig. 160. Gráfica de suministro para una bomba de cinco émbolos

El grado de irregularidad de suministro con número impar  $z$  se puede apreciar por la fórmula aproximada del científico soviético, profesor N. Acherkán:

$$\sigma = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{Q_{\text{med}}} 100 = \frac{125}{z^2} \%.$$

Todas las bombas rotativas enumeradas, salvo la de engranaje, construidas de modo correspondiente, admiten la posibilidad de regular su suministro durante el trabajo de la bomba, mediante el cambio de la excentricidad  $e$  (en el caso de la bomba de aletas o radial de émbolo) o del ángulo de inclinación de la arandela o del bloque  $\gamma$  (en el caso de la bomba de émbolo con cinemática espacial), siendo invariable el número de revoluciones.

## § 62. Características de las bombas volumétricas rotativas

Analicemos ahora las propiedades hidráulicas generales de todas las bombas volumétricas rotativas, es decir, sus características. Antes (§ 47 y 50) hemos acordado denominar característica de la bomba a la dependencia de la presión (o de la carga) con respecto al suministro (gasto), siendo constante el número de revoluciones.

De la fórmula (3.1) común para todas las bombas volumétricas rotativas

$$Q_T = \frac{Wn}{60},$$

se deduce que el suministro teórico de la bomba volumétrica rotativa no depende de la presión. Por eso su característica teórica en el sistema

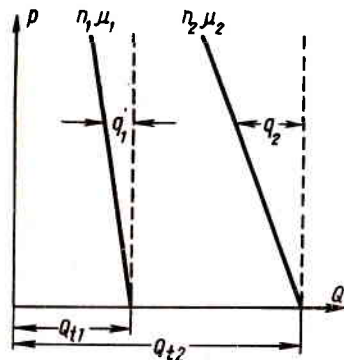


Fig. 161. Características de la bomba rotatoria con  $n_1, \mu_1$  y  $n_2, \mu_2$

de coordenadas  $p$  (o  $H$ ) contra  $Q$ , siendo  $n = \text{const.}$ , estará representada por una recta paralela al eje de ordenadas que va al infinito. Las características teóricas de la bomba volumétrica rotativa para dos diferentes números de revoluciones se muestran en la fig. 161 con líneas punteadas. Eso quiere decir, que teóricamente toda bomba volumétrica es capaz de crear cualquier presión, independientemente del número de revoluciones y del gasto. En la práctica se observa algo distinto y la característica real de la bomba volumétrica se diferencia de la teórica debido a las fugas. Efectivamente, toda bomba tiene mayores o menores holguras entre las piezas móviles y fijas, es decir, entre el rotor, los cierres y el estator. Al existir presión creada por la bomba, cierta cantidad de líquido fluye a través de estas holguras en dirección inversa a la descarga, es decir, de la región de descarga a la de aspiración. Esta cantidad de líquido, que pasa por las holguras en la unidad de tiempo, igual que en las bombas centrífugas, se denomina fuga y se designa con  $q$ .

Puesto que las holguras en la bomba rotativa son pequeñas, el régimen de corriente en éstas es laminar. Por lo tanto, la magnitud  $q$

es directamente proporcional a la presión que crea la bomba e inversamente proporcional a la viscosidad absoluta del líquido, pero no a la primera potencia, sino, como muestran los experimentos, a cierta potencia  $m$ , menor que la unidad. Para las bombas de engranaje se puede considerar  $m = \frac{1}{2}$ , para otras bombas no hay datos fidedignos, pero, por lo visto,  $m$  es del mismo orden.

De este modo, tenemos

$$q = A \frac{P_{\text{bomba}}}{\mu^m}, \quad (13.8)$$

donde  $A$  es una constante que depende de la construcción de la bomba y de la magnitud de las holguras y, como muestran los experimentos, no depende del número de revoluciones de la bomba.

La diferencia de la potencia  $m$  de la unidad se explica por el hecho de que al fluir el líquido a través de las holguras tienen lugar pérdidas de energía bastante considerables referentes a la unidad de peso del líquido, por eso el líquido en las holguras se calienta y disminuye su viscosidad en comparación con la del flujo principal.

El suministro efectivo de la bomba  $Q$ , es decir, el gasto del líquido que la bomba impulsa a la tubería, es menor que el teórico  $Q_T$  en la magnitud de la fuga, por consiguiente,

$$Q = Q_T - q = \frac{Wn}{60} - A \frac{P_{\text{bomba}}}{\mu^m}, \quad (13.9)$$

o bien,

$$Q = \eta_b Q_T,$$

donde  $\eta_b$  es el rendimiento volumétrico de la bomba.

De aquí se deduce, que las características reales de la bomba volumétrica de rotor, mostradas en la fig. 161 con líneas continuas, serán rectas inclinadas que intersecan las características teóricas, siendo  $p_{\text{bomba}} = 0$ , es decir, en el eje de abscisas, donde  $q = 0$  y  $Q = Q_T$ .

Cuanto mayor es la viscosidad del líquido tanto menor es la fuga por las holguras y tanto mayor es la pendiente de la característica de la bomba. Algunas curvaturas en la característica real que a veces se observan, se explican por la irregularidad del trabajo de la bomba: llenado defectuoso de los volúmenes de trabajo de la bomba o cavitación.

De la construcción de la característica real de la bomba volumétrica rotativa, según la fórmula (13.9), se deduce el método para calcular y reconstruir esta característica en condiciones diferentes de trabajo de la bomba, por ejemplo, de  $(n_1, \mu_1)$ , a  $(n_2, \mu_2)$ .

Primeramente calculamos las abscisas iniciales de las características, o sea,

$$\frac{Q_{T1}}{Q_{T2}} = \frac{n_1}{n_2},$$



de donde

$$Q_{T2} = Q_{T1} \frac{n_2}{n_1} \quad (13.10)$$

Después expresamos la relación de las fugas para presiones iguales, es decir, para  $p_{1 \text{ bomba}} = p_{2 \text{ bomba}}$ .

$$\frac{q_1}{q_2} = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^m,$$

de donde

$$q_2 = q_1 \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^m \quad (13.11)$$

Según las magnitudes obtenidas de  $Q_{T2}$  y  $q_2$  se construye una característica nueva, como se muestra en la fig. 161, para el caso cuando

$$n_2 > n_1 \text{ y } \mu_2 < \mu_1.$$

Los resultados de las pruebas de las bombas rotativas, siendo  $\mu = \text{const.}$ , se presentan generalmente en forma de función del gasto  $Q$  del número de revoluciones  $n$  para varias magnitudes constantes de la presión  $p_{\text{bomba}}$  creada por la bomba (fig. 162), obteniéndose varias rectas casi paralelas (ya que  $q$  no depende de  $n$ ), cada una de las cuales corresponde a la  $p_{\text{bomba}}$  constante. Mientras mayor es  $p_{\text{bomba}}$ , tanto más baja está colocada la recta, ya que la fuga  $q$  es mayor.

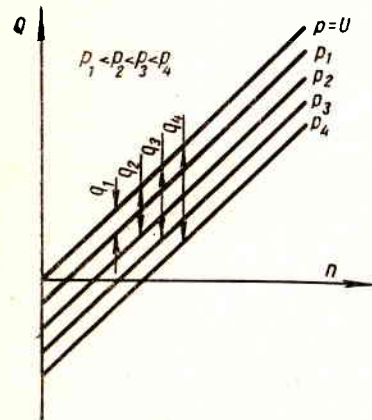


Fig. 162. Suministro de la bomba en función de revoluciones

En este caso, la característica de la bomba se modifica del modo indicado en la fig. 164. En el sector AB la válvula está cerrada, ya que la presión es pequeña. El punto B es el comienzo de la abertura de la válvula; la presión creada por la bomba es igual aquí a la tensión del muelle dividida por la superficie de la válvula. En el sector BC

el suministro del líquido a la tubería es igual a

$$Q = Q_T - Q_{\text{válv.}} - q,$$

donde  $Q_{\text{válv.}}$  es el gasto que pasa por la válvula.

El punto C corresponde al cierre completo de la tubería; todo el suministro de la bomba regresa a través de la válvula.

Un dispositivo más perfecto es el de servomotor, compuesto de un cilindro con émbolo y vástago, el cual actúa sobre la bomba regulable (véase las figs. 156 y 157). Al alcanzar la presión  $p_{\text{bomba}}$  una magnitud

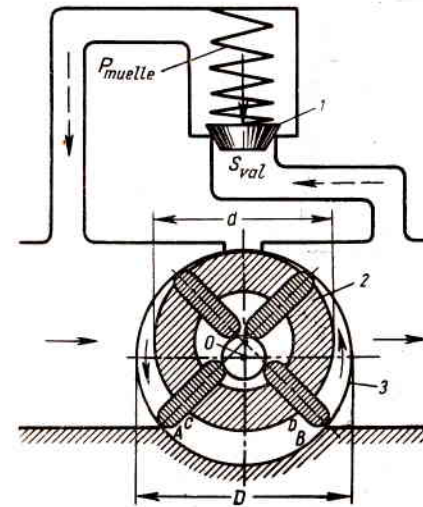


Fig. 163. Esquema de una bomba con válvula de reducción:  
1 — válvula de reducción; 2 — rotor; 3 — estator

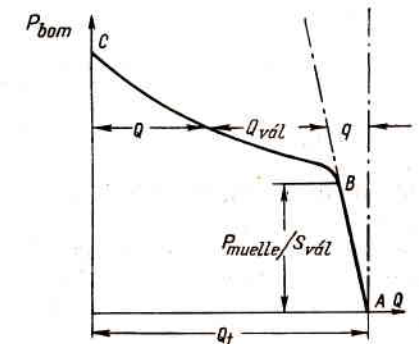


Fig. 164. Característica de la bomba regulable

determinada y al actuar sobre el émbolo 8, comprime el muelle 9 y hace girar la arandela 3 a un ángulo menor  $\gamma$ . El suministro disminuye gracias a lo cual la presión casi no aumenta. La característica correspondiente de la bomba se da en la fig. 165. En el sector AB la arandela forma el ángulo máximo. En el punto B el ángulo  $\gamma$  comienza a disminuir, y en el punto C constituye sólo parte de un grado, lo que es necesario para compensar las fugas.

Si la presión en la cavidad del servocilindro de la bomba que contiene el muelle (a la derecha del émbolo en las figs. 156 y 157) fuese constante e igual, por ejemplo, a la atmosférica, la inclinación de la característica de la bomba en el sector BC se determinaría solamente por la rigidez del muelle. Para obtener una característica de pendiente suave se debe hacer el muelle poco rígido, pero, al mismo tiempo, muy potente; es decir, de grandes dimensiones.

## Transmisiones hidráulicas

Se denomina transmisión hidráulica un dispositivo que realiza la transmisión de la energía por medio de un líquido.

Toda transmisión hidráulica está compuesta de los dos siguientes elementos principales: la bomba, que transforma la energía mecánica en hidráulica (energía del líquido), y del hidromotor, que efectúa la transformación inversa de la energía. El hidromotor realiza el movimiento de vaivén o de rotación. De acuerdo con este signo cinemático, las transmisiones hidráulicas se dividen en dos tipos principales: las de movimiento de vaivén y las de movimiento rotatorio. En la técnica de aviación se emplean ambos tipos de transmisiones hidráulicas. La clasificación ulterior de las transmisiones hidráulicas se dará más adelante.

### § 63. Transmisiones hidráulicas de movimiento de vaivén

Las transmisiones hidráulicas de movimiento de vaivén tienen en calidad de hidromotor un sencillo dispositivo en forma de un cilindro de poder con pistón y vástago. El esquema de esta transmisión hidráulica, en forma típica para un avión, se da en la fig. 166. Con líneas continuas se indican las tuberías por las cuales fluye el líquido durante el trabajo, es decir, al moverse el pistón hacia arriba o hacia abajo. Las líneas punteadas son los conductos auxiliares.

La bomba aspira el líquido del depósito y lo hace pasar por la así llamada línea de bomba hacia la llave de mando. En el dibujo, su distribuidor está en la posición cuando es proporcionado el líquido a la cavidad inferior del cilindro. La presión del líquido desplaza el pistón hacia arriba y supera la carga en el vástago, es decir, la fuerza  $P$ . Al mismo tiempo, de la cavidad superior del cilindro se realiza el vaciado del líquido al depósito por los canales correspondientes de la llave de mando y después por la línea de desagüe.

Tales sistemas hidráulicos se emplean ampliamente en los aviones para desplegar y replegar el tren de aterrizaje, frenos aerodinámicos, flaps, así como para poner en acción otros mecanismos.

La bomba de engranaje o rotativa de estos sistemas sirve de fuente de energía hidráulica. La bomba de engranaje se emplea junto con un dispositivo automático de descarga, que la pasa al régimen de marcha en vacío cuando la presión en el sistema alcanza el valor máximo.

La bomba rotativa de émbolo, en la mayoría de los casos, es regulable y cambia automáticamente su suministro manteniendo la presión en los límites dados.

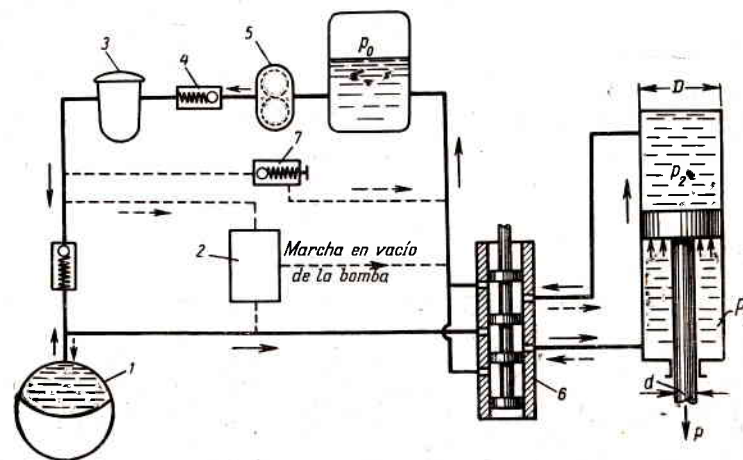


Fig. 166. Esquema de la transmisión hidráulica de movimiento de vaivén  
1 — hidroacumulador; 2 — dispositivo automático de descarga de la bomba; 3 — filtro;  
4 — válvula de retención; 5 — bomba; 6 — llave de mando.

El acumulador hidráulico sirve para asegurar los excesos de gasto del líquido de corta duración que no puede superar la bomba. Gracias al acumulador hidráulico se puede utilizar una bomba de menores dimensiones. Además, en los sistemas con dispositivo automático de descarga, el acumulador hidráulico tapa las fugas del líquido desde la línea de alta presión a la de desagüe durante la marcha en vacío de la bomba.

En los sistemas hidráulicos de aviones se emplea principalmente como líquido de trabajo, el líquido AMF-10: keroseno pesado mezclado, al cual, para aumentar la viscosidad, se le agrega un «espesador» especial (vinipol). Las propiedades físicas del líquido AMF-10 se dan en la tabla 1 (véase el capítulo 1). El movimiento del líquido AMF-10 es laminar a temperaturas bajas en las tuberías. Pero, debido a su viscosidad comparativamente pequeña, existen sectores, en los sistemas hidráulicos de avión, donde el régimen laminar de corriente cambia a turbulento. Así, por ejemplo, cuando hace frío, al replegar el tren de aterrizaje, en la línea de desagüe se establece la corriente laminar del líquido, mientras que en la línea de la bomba, donde el líquido está caliente, la corriente puede ser turbulenta.



En otros casos debe cumplirse una ley más complicada de movimiento del pistón (del vástago). Así, por ejemplo, en los sistemas de gobierno del avión, el vástago del cilindro hidráulico de poder debe seguir automáticamente el desplazamiento de la palanca de mando y a cualquier posición de la palanca debe corresponder una posición determinada del vástago.

Semejantes sistemas hidráulicos se denominan sistemas de seguimiento, y el cilindro hidráulico se llama en este caso servomecanismo.

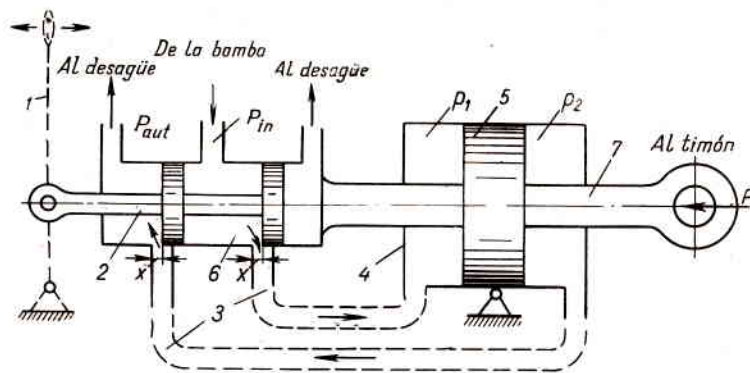


Fig. 168. Esquema de principio del servomecanismo (booster)

1 — palanca de mando; 2 — distribuidor de mando; 3 — canales; 4 — cilindro; 5 — pistón; 6 — cuerpo del distribuidor; 7 — vástago ejecutivo

hidráulico o booster (reforzador), porque su vástago no sólo repite el movimiento de la palanca, sino que desarrolla un esfuerzo considerablemente mayor que el aplicado a la misma.

El mando de los aviones modernos, así como el de los helicópteros se realiza, como regla, mediante los boosters, ya que el esfuerzo que es necesario aplicar en los órganos de mando a menudo supera en muchas veces la fuerza muscular del piloto.

El esquema de principio del booster se muestra en la fig. 168. Moviendo la palanca de mando 1, por ejemplo, a la derecha, el piloto desplaza el distribuidor de mando 2, el cual hace pasar el líquido bajo presión a la cavidad derecha del cilindro 4 a través de los canales 3 y comunica su cavidad izquierda con el desagüe. Bajo la presión creada por la bomba, el pistón 5 se desplaza a la derecha junto con el cuerpo del distribuidor 6 hasta que se recubran los canales del mismo, por los cuales se alimenta al cilindro con el líquido y se desvía de éste. Al desplazar la palanca y el distribuidor a la izquierda, la presión se transmite a la cavidad derecha del cilindro y el pistón se desplazará a la izquierda.

De este modo, el vástago ejecutivo 7, unido, por ejemplo, con el timón del avión, sigue todos los movimientos del distribuidor 2, pero el esfuerzo que aquél desarrolla supera muchas veces el que el piloto aplica al distribuidor.

Examinemos ahora las características principales del servomecanismo hidráulico como mando de fuerza. Deduzcamos las fórmulas para el esfuerzo aplicado sobre el vástago ejecutivo del servomecanismo hidráulico, el rendimiento de éste y la potencia que desarrolla.

La presión que se proporciona al servomecanismo hidráulico se gasta para vencer el esfuerzo a lo largo del vástago ejecutivo  $P$  y las resistencias hidráulicas, o sea,

$$p_0 = \Delta p_{cil.} + \sum p, \quad (14.4)$$

donde  $p_0 = p_{entr.} - p_{sal.}$  es la presión del líquido a la entrada del servomecanismo hidráulico menos la presión a la salida;  $\Delta p_{cil.} = p_1 - p_2$  es el gradiente de presión en el cilindro, igual a

$$\Delta p_{cil.} = \frac{P}{S};$$

$S$  es la superficie del pistón menos la del vástago;  $\sum p$  es la pérdida total de presión durante el movimiento del líquido desde la entrada hasta la salida del servomecanismo hidráulico.

Considerando que las pérdidas hidráulicas tienen lugar principalmente en los dos canales parcialmente recubiertos del distribuidor y que estas pérdidas están subordinadas a la ley cuadrática en función de la velocidad (gasto), se puede anotar

$$\Delta p = 2\zeta \frac{v^2}{2g} \gamma,$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de resistencia del canal del distribuidor;  $v$  es la velocidad de escurrimiento del líquido por el canal del distribuidor.

Puesto que los canales del distribuidor suelen tener la forma de rectángulo, uno de cuyos lados es invariable e igual a  $b$  y el otro es variable,  $x$ , se puede anotar la ecuación del gasto en la forma siguiente:

$$Q = VS = vb x,$$

donde  $V$  es la velocidad de desplazamiento del pistón.

Expresando ahora  $V$  por medio de  $Q$  e introduciéndolo en la fórmula para  $\sum p$  tendremos

$$p_0 = \Delta p_{cil.} + 2\zeta \gamma \frac{Q^2}{2g (bx)^2},$$

o

$$p_0 = \Delta p_{cil.} + k \frac{Q^2}{x^2}, \quad (14.4')$$

donde

$$k = \frac{\zeta \gamma}{g b^2}.$$

La magnitud  $k$  puede ser considerada aproximadamente constante e independiente del gasto. Si el servomecanismo hidráulico es alimen-



tado por una bomba regulable de presión constante (véase las figs. 157 y 165) y, si pueden ser despreciadas las pérdidas hidráulicas en los tubos conductores, la presión  $p_0$  será también constante e igual a la que crea la bomba.

Si la carga en el vástago ejecutivo es nula ( $P = 0$  y  $p_{c11} = 0$ ) y los canales del distribuidor están completamente abiertos ( $x = x_{m\acute{a}x.}$ ), el suministro (gasto) del líquido al servomecanismo hidráulico es igual a  $Q = Q_{m\acute{a}x.}$  De la ecuación (14.4) tendremos entonces

$$k = p_0 \frac{x_{m\acute{a}x.}^2}{Q_{m\acute{a}x.}^2}$$

Después de hacer la sustitución en la ecuación (14.4) y resolverla respecto a  $\Delta p_{c11.}$ , tendremos

$$\Delta p_{c11.} = p_0 \left( 1 - \frac{\bar{Q}^2}{x_2} \right),$$

donde  $\bar{Q} = \frac{Q}{Q_{m\acute{a}x.}} = \frac{v}{v_{m\acute{a}x.}} = \bar{V}$  es el gasto relativo o la velocidad relativa del vástago ejecutivo;

$\bar{x} = \frac{x}{x_{m\acute{a}x.}}$  es el grado de abertura de los canales del distribuidor.

La fuerza a lo largo del vástago ejecutivo (carga) es igual a

$$P = \Delta p_{c11.} S = p_0 S \left( 1 - \frac{\bar{Q}^2}{x_2} \right), \quad (14.5)$$

y la carga relativa  $\bar{P}$  se halla al dividir  $P$  por  $P_{m\acute{a}x.} = p_0 S$ , o sea

$$\bar{P} = \frac{P}{p_0 S} = 1 - \frac{\bar{Q}^2}{x_2} \quad (14.5')$$

La ecuación obtenida permite trazar una red de características estáticas del servomecanismo hidráulico (booster), o sea, la dependencia  $\bar{P}$  de  $\bar{Q}$  para distintos valores de  $\bar{x}$  (véase la fig. 169). La gráfica está trazada para valores positivos y negativos de  $\bar{Q}$  y  $\bar{x}$ , es decir, para el movimiento del distribuidor y del vástago y, por consiguiente, del líquido tanto en una como en otra dirección.

En la gráfica se ve, que sólo con velocidades pequeñas de desplazamiento del vástago ejecutivo, el esfuerzo en éste se aproxima al valor máximo posible de  $p_0 S$ . Cuanto mayor es la velocidad con que se desplaza el vástago ejecutivo tanto menor será la carga que superará.

En el punto donde las curvas cruzan el eje de abscisas, la carga sobre el vástago cambia de signo, es decir, se convierte en la fuerza que tira del vástago en dirección del movimiento. En este caso su velocidad va aumentando y el cilindro hidráulico pasa al régimen de bomba. De este modo, en la gráfica, en los cuadrantes I y III, el cilindro hidráulico funciona en el régimen de hidromotor, que realiza el trabajo de superación de la carga, y en los cuadrantes II y IV, en el

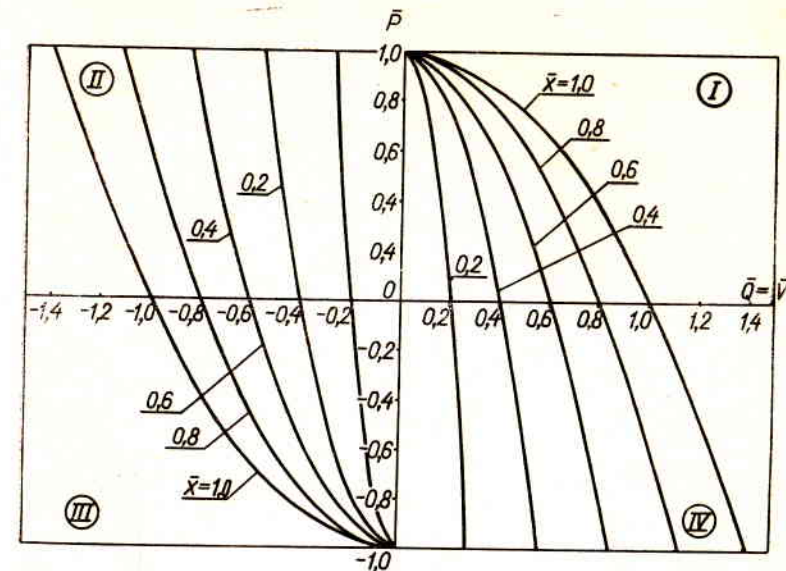


Fig. 169. Características estáticas del servomecanismo

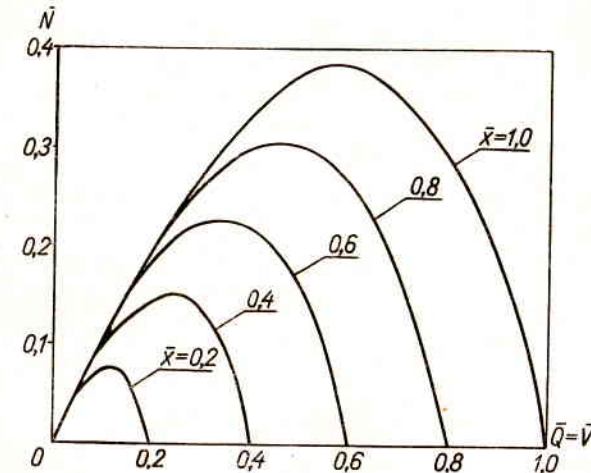


Fig. 170. Potencia relativa del servomecanismo en función del gasto relativo



régimen de bomba, que impulsa el líquido en la misma dirección que la bomba principal.

El rendimiento del servomecanismo hidráulico  $\eta$  se representa como la relación entre el trabajo por segundo que realiza el vástago ejecutivo y la potencia del flujo del líquido proporcionado al servomecanismo hidráulico, o sea

$$\eta = \frac{PV}{p_0 Q} = \frac{PV}{p_0 VS} = \frac{p_{c11.}}{p_0} = P. \quad (14.6)$$

Por consiguiente, el rendimiento del servomecanismo hidráulico es numéricamente igual a la carga relativa sobre el vástago y varía según la misma ley que  $P$ .

La potencia útil del servomecanismo hidráulico es igual a

$$N = PV$$

y la potencia relativa se determina por la relación

$$\bar{N} = \frac{PV}{p_0 SV_{\text{máx.}}} = \bar{P} \bar{V}.$$

Aplicando la fórmula (14.5') y tomando en consideración que  $\bar{V} = \bar{Q}$  tendremos

$$\bar{N} = \left(1 - \frac{\bar{Q}^2}{x^2}\right) \bar{Q}. \quad (14.7)$$

En la fig. 170 se muestran las curvas de la potencia relativa  $\bar{N}$  en función de  $\bar{Q}$  para diversas  $x$ , construidas según la fórmula (14.7).

Ahora vamos a hallar el valor del caudal relativo  $\bar{Q}$  con el cual la potencia es máxima.

Siendo  $x = 1$ , en vez de (14.7) tenemos

$$N_{x=1} = (1 - \bar{Q}^2) \bar{Q}.$$

Después de diferenciar por  $\bar{Q}$  igualamos la derivada a cero; tendremos

$$\frac{dN}{dQ} = 1 - 3\bar{Q}^2 = 0.$$

De aquí que el gasto relativo óptimo

$$\bar{Q}_{\text{ópt.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y la potencia relativa máxima

$$\bar{N}_{\text{máx.}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

En este caso, la carga relativa sobre el vástago y el rendimiento del servomecanismo hidráulico, según las fórmulas (14.5') y (14.6),

son iguales a

$$\bar{P} = \eta = \frac{2}{3}.$$

La magnitud absoluta de la potencia máxima será igual a

$$N_{\text{máx.}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} p_0 SV_{\text{máx.}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} Q_{\text{máx.}} p_0.$$

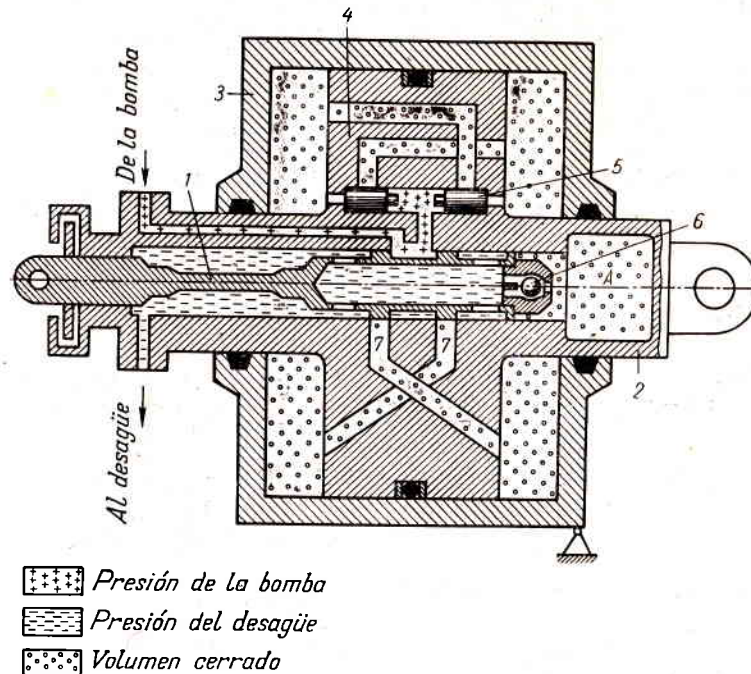


Fig. 171. Esquema del servomecanismo hidráulico  
1 - distribuidor de mando; 2 - vástago ejecutivo; 3 - cilindro; 4 - émbolo; 5 - chupones del sistema de regulación; 6 - válvula de amortiguación

donde  $Q_{\text{máx.}}$  puede ser hallado de la expresión obtenida anteriormente para  $k$ , a saber;

$$Q_{\text{máx.}} = x_{\text{máx.}} \sqrt{\frac{p_0}{k}}.$$

Después de hacer la sustitución en la expresión anterior, tendremos definitivamente

$$N_{\text{máx.}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{x_{\text{máx.}}}{\sqrt{k}} p_0^{3/2}.$$

En la fig. 171 se da el esquema del servomecanismo hidráulico con el distribuidor dispuesto en el interior del vástago ejecutivo. Al

desplazarse el distribuidor de mando 1, el líquido se dirige desde la bomba por los canales a una de las cavidades del cilindro 3 y se evacúa de la otra cavidad.

Además del cilindro con el vástago y el distribuidor los servomecanismos hidráulicos de aviones tienen también los siguientes dispositivos complementarios:

a) **Sistema de regulación de los cilindros** que asegura la conexión automática de ambas cavidades del cilindro al bajar la presión en el sistema hidráulico. Esto es necesario para el desplazamiento libre del

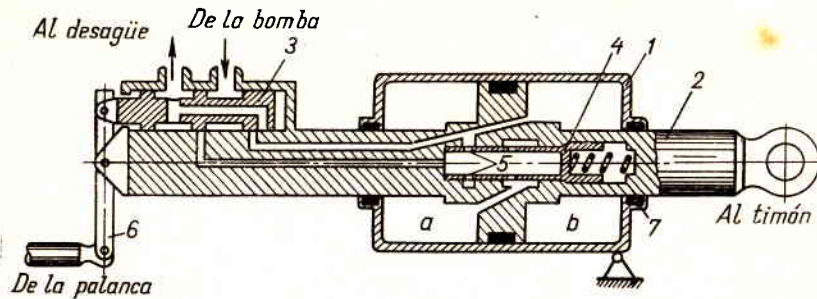


Fig. 172. Esquema del servomecanismo hidráulico con distribuidor exterior: 1 — cilindro; 2 — vástago ejecutivo; 3 — distribuidor; 4 — válvula del sistema de regulación; 5 — orificios del sistema de regulación

vástago ejecutivo del servomecanismo hidráulico por medio de la palanca del piloto, cuando se pasa al gobierno manual y el servomecanismo hidráulico no realiza ningún trabajo, sino que se convierte en un simple eslabón cinemático.

En la fig. 171 la unión anular de las cavidades del cilindro se realiza por medio de chupones reguladores 5. Es evidente que, cuando en el sistema no hay presión, el desplazamiento del pistón por una fuerza exterior provoca la desviación de los chupones reguladores y la apertura de los canales por los cuales el líquido fluye sin obstáculo de una cavidad del cilindro a la otra.

b) El **amortiguador del distribuidor** en la fig. 171 está indicado en forma de una válvula de bola 6. El distribuidor y esta válvula trabajan como bomba, extrayendo ininterrumpidamente el líquido de la cavidad del amortiguador A, donde, gracias a esto, se forma el vacío. De este modo, sobre la cara del distribuidor actúa una carga constante unilateral, la cual, como muestran los experimentos, protege el servomecanismo hidráulico de autooscilaciones.

Otro esquema del servomecanismo hidráulico se muestra en la fig. 172. Este se diferencia del anterior, ante todo, por la disposición externa del distribuidor, cuyo cuerpo también está unido rigidamente al vástago ejecutivo. El sistema de regulación está hecho del modo siguiente: cuando no hay presión en el servomecanismo hidráulico, la válvula reguladora 4 es llevada por el muelle a la posición izquierda

extrema (como se muestra en el diseño) y une la cavidad izquierda del cilindro con la derecha. Si el líquido se suministra bajo presión al servomecanismo hidráulico, la válvula reguladora, por la acción de esta presión, se desplaza a la derecha, cubre el orificio 5 y separa una cavidad del servomecanismo hidráulico de la otra.

El servomecanismo hidráulico se conecta al sistema de mando del avión según el esquema «reversible» o «irreversible».

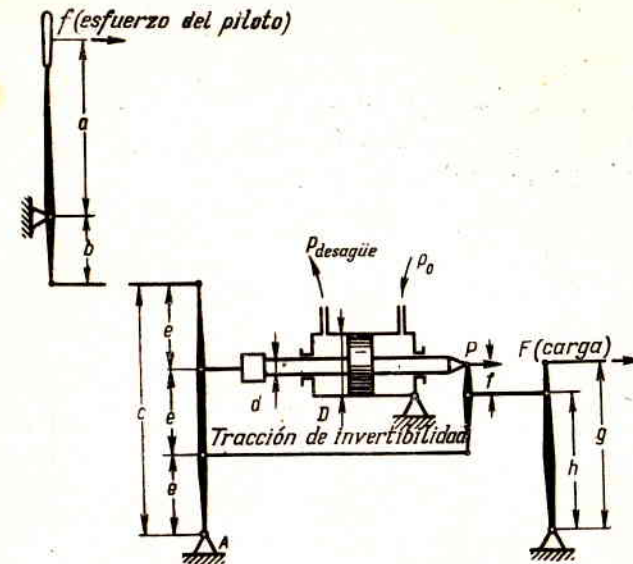


Fig. 173. Esquema de la transmisión de la palanca al órgano de mando a través del servomecanismo hidráulico

En el primer caso, una parte insignificante del esfuerzo se transmite de los órganos de mando al piloto. En el segundo caso, toda la carga se equilibra completamente por la fuerza hidráulica, y a la palanca de mando se transmite sólo la fuerza de rozamiento en el distribuidor de mando.

En la fig. 173 es muestra el trabajo del servomecanismo hidráulico según el esquema de mando reversible. Si nos imaginamos por un momento que el tirante de reversibilidad está inmóvil y el centro de rotación del balancín ha sido trasladado del punto A al B, el esquema de mando reversible se convertirá en el irreversible.

Vamos a aclarar el papel del servomecanismo hidráulico, cuando el esquema es reversible, con el ejemplo numérico siguiente:

**Ejemplo.** Se da (véase la fig. 173)

Diámetro del cilindro del servomecanismo hidráulico  $D = 50$  mm.

Diámetro del vástago ejecutivo  $d = 30$  mm.

Rendimiento del servomecanismo hidráulico  $\eta = 0,90$ .



Carga de los órganos de mando  $F = 960$  kg.  
Relación de los brazos:

$$\frac{a}{b} = 4; \frac{c}{e} = 3; \frac{e}{f} = 4; \frac{g}{h} = \frac{3}{2}.$$

D e t e r m i n a r: 1) La presión a la entrada del servomecanismo hidráulico, si la presión en la línea de desagüe  $p_{\text{desagüe}} = 3$  kg/cm<sup>2</sup>.

2) El esfuerzo en la palanca  $f_1$  kg, habiendo presión en el servomecanismo hidráulico y sin ella.

S o l u c i ó n. 1. Determinamos la fuerza  $P$  aplicada al vástago ejecutivo del servomecanismo hidráulico.

$$P = F \frac{g}{h} \cdot \frac{e-f}{e} = 960 \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1.080 \text{ kg.}$$

2. Determinamos la presión  $p_0$  a la entrada del servomecanismo hidráulico. Puesto que

$$P = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) (p_0 - p_{\text{desagüe}}) \eta,$$

entonces,

$$p_0 = \frac{4P}{\pi \eta (D^2 - d^2)} + p_{\text{desagüe}} = \frac{4 \cdot 1.080}{3,14 \cdot 0,9 (5^2 - 3^2)} + 3 = 98,5 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Hallamos el esfuerzo en la palanca de mando, habiendo presión en el servomecanismo hidráulico.

La relación de transmisión  $i_1$  («coeficiente de reversibilidad») es igual a

$$i_1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{c} \cdot \frac{f}{e} \cdot \frac{g}{h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{32}.$$

El esfuerzo en la palanca de mando  $f_1 = i_1 F = \frac{1}{32} 960 = 30$  kg.

4. Hallamos el esfuerzo en la palanca de mando cuando no hay presión en el servomecanismo hidráulico.

En este caso la relación de transmisión es igual a

$$i_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{h}{c} \cdot \frac{g}{h} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c-e-f}{c} \cdot \frac{g}{h} = \frac{7}{32}.$$

El esfuerzo en la palanca  $f_2 = i_2 F = \frac{7}{32} 960 = 210$  kg, es decir, el gobierno manual del avión en el régimen dado de vuelo es imposible, por eso hay que prever una fuente de potencia de emergencia, por si el sistema hidráulico deja de funcionar.

## § 65. Transmisiones hidráulicas de movimiento rotatorio (volumétricas rotativas)

Conforme a la división de las bombas en dos clases principales, las de álabes y las volumétricas, las transmisiones hidráulicas de movimiento rotatorio se dividen también en hidrodinámicas (de álabes) y volumétricas o, más precisamente, volumétricas rotativas. Estas últimas las examinaremos en primer término y con más detalles.

Las transmisiones hidráulicas volumétricas rotativas vienen a ser la unión de una bomba con un motor hidráulico de tipo volumétrico rotativo, que se llama hidromotor. Por su construcción, el hidromotor

es la misma bomba, pero convertida en motor. Todas las bombas volumétricas rotativas tienen la propiedad de ser reversibles, es decir, pueden ser empleadas tanto en calidad de bomba, como en calidad de hidromotor. Esto significa, que, si a la bomba rotativa se le proporciona el líquido bajo suficiente presión, su rotor girará y realizará un trabajo.

La ventaja principal de la transmisión hidráulica de movimiento rotatorio, en comparación con transmisiones mecánicas corrientes, consiste en la posibilidad de cambiar de un modo gradual (no escalonado) la relación de transmisión y la transformación del momento.

En la fig. 174 se muestra el esquema de una simple transmisión hidráulica volumétrica rotativa (mando hidráulico), es decir, de la bomba, el hidromotor y el depósito con líquido, unidos mediante tuberías. El depósito, incluido en el sistema, es necesario para compensar las fugas exteriores del líquido y de las variaciones del volumen del líquido según la temperatura, así como para debilitar su calentamiento durante el trabajo. Además, la elevada presión del aire en el depósito crea las condiciones necesarias en la tubería de aspiración para eliminar la posibilidad de la cavitación en la bomba.

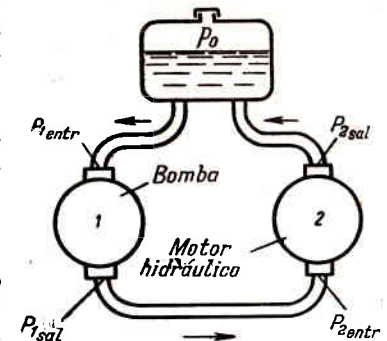


Fig. 174. Esquema de la transmisión hidráulica volumétrica rotativa

Es posible también la construcción de la transmisión hidráulica de tipo cerrado, es decir, sin incluir el depósito en el esquema principal de circulación del líquido. Pero en este caso empeoran las condiciones de refrigeración del líquido. El depósito con presión elevada o con bomba de alimentación debe ser unido a la línea de aspiración tal como se indicó para la tubería cerrada (véase la fig. 124).

Examinemos las relaciones principales para la transmisión hidráulica que trabaja según el esquema indicado, designando las magnitudes referentes a la bomba con índice 1, y al hidromotor, con índice 2.

El suministro útil de la bomba es igual al gasto efectivo que pasa por el hidromotor, o sea,

$$Q_1 = Q_2. \quad (14.8)$$

Pasemos de los gastos efectivos a los teóricos, tomando en consideración, que el gasto efectivo, que pasa por el hidromotor, es mayor que el teórico y que las fugas en el hidromotor están dirigidas en el mismo sentido que el gasto principal. En vez de la fórmula (14.8) tendremos

$$Q_{T1} \eta_{v1} = \frac{Q_{T2}}{\eta_{v2}}$$

donde  $\eta_{v1}$  es el rendimiento volumétrico de la bomba;

$\eta_{v2}$  es el rendimiento volumétrico del hidromotor, el cual, a diferencia de  $\eta_{v1}$ , se determina como relación entre el gasto teórico y efectivo.

De aquí que el rendimiento volumétrico de toda la transmisión hidráulica ( $\eta_{vTr}$ ) será igual a

$$\eta_{vTr} = \eta_{v1} \eta_{v2} = \frac{Q_{T2}}{Q_{T1}} \quad (14.9)$$

Suponiendo que la bomba y el hidromotor son regulables, introducimos en el análisis el coeficiente de regulación  $\psi$ , que para las bombas e hidromotores con posición excéntrica del rotor es igual a  $\frac{e}{e_{m\acute{a}x}}$  (véase el § 60), y para las máquinas hidráulicas rotativas de émbolo con arandela (bloque) inclinada, a  $\frac{\text{tg } \gamma^1}{\text{tg } \gamma_{m\acute{a}x}}$ . Es evidente que, al regular

las máquinas hidráulicas, los coeficientes  $\psi$  pueden variar desde 0 a 1. Entonces, expresando los gastos teóricos por medio de volúmenes de trabajo máximos  $W$ , coeficientes  $\psi$  y números de revoluciones  $n$ , tendremos

$$\eta_{HTr} = \frac{\psi_2 W_2 n_2}{\psi_1 W_1 n_1} = \frac{\psi_2 W_2}{\psi_1 W_1} \cdot \frac{1}{i}, \quad (14.10)$$

donde  $i$  es la relación de transmisión, igual a

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\psi_2 W_2}{\psi_1 W_1} \cdot \frac{1}{\eta_{vTr}} \quad (14.10')$$

Debido a que en las tuberías que unen la bomba, el hidromotor y el depósito, existen pérdidas hidráulicas, la presión que crea la bomba ( $p_1$ ) será mayor que la que utiliza el hidromotor ( $p_2$ ). La relación entre  $p_2$  y  $p_1$  se denomina rendimiento hidráulico de la transmisión hidráulica, o sea,

$$\eta_{HTr} = \frac{p_2}{p_1} \quad (14.11)$$

Hay que tener en cuenta que aquí (véase la fig. 174)

$$p_2 = p_{2 \text{ entr.}} - p_{2 \text{ sal.}};$$

$$p_1 = p_{1 \text{ sal.}} - p_{1 \text{ entr.}}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, tendremos

$$p_1 - p_2 = (p_{1 \text{ sal.}} - p_{2 \text{ entr.}}) + (p_{2 \text{ sal.}} - p_{1 \text{ entr.}}) = \sum p_T,$$

es decir, la diferencia entre la presión que crea la bomba y la que utiliza el hidromotor es igual a la pérdida total de presión en las tuberías (líneas de descarga, de aspiración y de desagüe).

Apliquemos ahora las ecuaciones energéticas para la bomba y el hidromotor, es decir, expresemos la potencia que se gasta en la rotación

<sup>1</sup> Si los chupones están dispuestos bajo un ángulo  $\varphi$  con respecto al eje de rotación, el coeficiente  $\psi$  se puede expresar del mismo modo, sin cometer gran error.

de la bomba ( $N_1$ ) y la que desarrolla el hidromotor ( $N_2$ ). Tomando en cuenta la fórmula (12.4), para la bomba, tendremos

$$N_1 = M_1 \omega_1 = \frac{p_1 Q_1}{\eta_{v1} \eta_{M1}} \quad (14.12)$$

y para el hidromotor

$$N_2 = M_2 \omega_2 = p_2 Q_2 \eta_{v2} \eta_{2M}, \quad (14.13)$$

donde  $M$  son los momentos de rotación;

$\omega$  son las velocidades angulares;

$\eta_M$  son los rendimientos mecánicos, considerando el rozamiento en las máquinas hidráulicas.

Los rendimientos hidráulicos de las máquinas hidráulicas rotativas, tanto de las bombas, como de los hidromotores, se consideran generalmente iguales a la unidad, ya que las pérdidas principales en estas máquinas son las volumétricas y mecánicas; las pérdidas hidráulicas se incluyen en las mecánicas.

Dividiendo la segunda ecuación por la primera hallamos la magnitud del rendimiento total de toda la transmisión hidráulica, el cual, por una parte, será igual a

$$\eta_{Tr} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1} = \frac{k}{i}, \quad (14.14)$$

donde  $k$  es el coeficiente de transformación del momento.

Por otra parte, tomando en consideración las fórmulas (14.8) y (14.11), después de hacer una división semejante, tendremos

$$\eta_{Tr} = \frac{p_2}{p_1} \eta_{v1} \eta_{v2} \eta_{M1} \eta_{M2} = \eta_{HTr} \eta_{vTr} \eta_{MTTr} = \eta_H \eta_1 \eta_2, \quad (14.15)$$

es decir, el rendimiento total de la transmisión hidráulica es igual al producto de sus rendimientos hidráulico, volumétrico y mecánico o al producto del rendimiento hidráulico (considerando las pérdidas en las líneas de unión) por el rendimiento total de la bomba y por el rendimiento total del hidromotor.

Los valores del rendimiento total de las transmisiones hidráulicas rotativas varían entre los límites de 0,7 a 0,85.

La regulación de las transmisiones hidráulicas, con el fin de cambiar la relación de transmisión  $i$  y el coeficiente de transformación del momento  $k$ , se puede realizar empleando uno de los métodos siguientes:

1) Regulando la bomba, es decir, cambiando su excentricidad o la inclinación de la arandela (del bloque).

2) Regulando el hidromotor, es decir, cambiando su excentricidad o la inclinación de la arandela (del bloque).

3) Dejando pasar una parte del suministro de la bomba por la válvula.

A menudo se emplea el primer método de regulación, formando la transmisión hidráulica con la bomba regulable y el hidromotor



irregulable. El empleo del segundo método de regulación puede ser conveniente como complemento al primer método. Ambas máquinas hidráulicas, que forman en este caso la transmisión, deben ser regulables. El tercer método de regulación no es económico y se aplica sólo en los casos de funcionamiento breve de la transmisión hidráulica.

El ejemplo más importante del empleo de las transmisiones hidráulicas volumétricas rotativas en los aviones son las transmisiones que van de los motores a los generadores de corriente alterna de frecuencia estable. Los generadores deben tener una velocidad angular de rotación

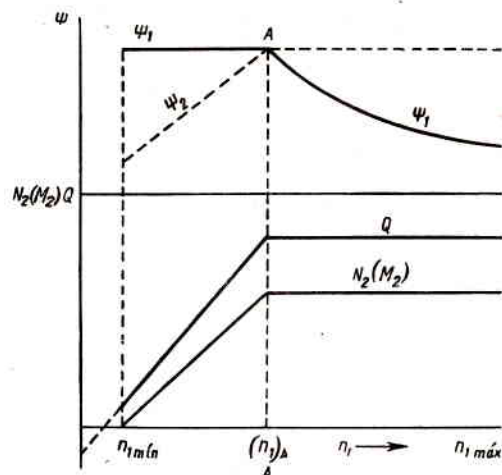


Fig. 175. Gráfica de regulación de la transmisión hidráulica

constante, a pesar de las variaciones de las revoluciones del motor y de las modificaciones de la carga en la red eléctrica. En estas condiciones, el número de revoluciones del hidromotor unido con el generador  $n_2 = \text{const.}$  y el número de revoluciones de la bomba  $n_1$  cambian en cierta escala, dependiendo del tipo del motor. Por consiguiente, la relación de transmisión en la transmisión hidráulica debe cambiar gradual y automáticamente.

En la fig. 175 se muestra la gráfica de regulación de la transmisión hidráulica para el ejemplo citado, es decir, los coeficientes  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , el gasto  $Q$  y la potencia  $N_2$  (así como el momento  $M_2$ ) con presiones y revoluciones  $n_2$  constantes, en función del número de revoluciones del árbol motriz (de la bomba)  $n_1$ .

La vertical  $A - A$  corresponde al caso cuando ambas máquinas hidráulicas tienen volúmenes de trabajo máximos, es decir,  $\psi_1 = \psi_2 = 1$ . A la derecha de la vertical  $A - A$  está la zona de regulación de la bomba, donde el coeficiente  $\psi_1$  disminuye por la ley hiperbólica (véase la fórmula 14.10'), y a la izquierda, la zona de regulación del hidromotor, donde el coeficiente  $\psi_2$  aumenta por la ley de la recta.

El gasto se determina por la relación

$$Q = \psi_1 W_1 n_1 - q = \psi_2 W_2 n_2 + q,$$

por consiguiente, siendo constante  $p_1 = p_2 = p$ , el gasto se representa en la gráfica por una recta que se quiebra en la línea  $A - A$ . Esto quiere decir, que al regular la bomba, el gasto queda constante y al regular el hidromotor, disminuye según la recta.

La potencia útil del hidromotor  $N_2$ , que se determina por la fórmula (14.13), con las admisiones adoptadas, se representa aproximadamente igual que el gasto; y el momento, exactamente igual que la potencia.

El número de revoluciones mínimo  $n_{1 \text{ mín.}}$  y  $\psi_{2 \text{ mín.}}$  son determinados por el autofrenado del hidromotor, es decir, por la igualdad  $M_2 = 0$ .

El número de revoluciones máximo  $n_{1 \text{ máx.}}$  y  $\psi_{1 \text{ mín.}}$  son determinados por el límite de capacidad de trabajo de la bomba según las revoluciones. Para las modernas bombas rotativas de émbolo se considera  $n_{1 \text{ máx.}} \approx 4.500 \text{ r. p. m.}$

Utilizando la ecuación (14.10') para el régimen de trabajo de la transmisión hidráulica, cuando  $\psi_1 = \psi_2 = 1$  y  $n_1 = (n_1)_A$ ; y después, para el régimen de revoluciones máximas de la bomba  $n_{1 \text{ máx.}}$ , dividiendo una ecuación por otra, tendremos

$$\frac{n_{1 \text{ máx.}}}{(n_1)_A} = \frac{1}{(\psi_1)_{\text{mín.}}}.$$

Esta relación de los números de revoluciones se denomina escala de regulación según las revoluciones, conservando constante la potencia.

Si suponemos, como ocurre a menudo, que  $n_2 = (n_1)_{\text{máx.}}$ , de la misma ecuación (14.10'), tendremos que

$$(\psi_1)_{\text{mín.}} = \frac{W_2 n_2}{W_1 (n_1)_{\text{máx.}}} \cdot \frac{1}{\eta_v} = \frac{W_2}{W_1} \cdot \frac{1}{\eta_v}$$

$$\frac{n_{1 \text{ máx.}}}{(n_1)_A} = \frac{W_1}{W_2} \eta_v.$$

Esto significa que, si queremos asegurar una escala de regulación conservando constante la potencia, igual, por ejemplo, a dos, el volumen de trabajo de la bomba debe ser aproximadamente dos veces mayor que el del hidromotor.

La escala de regulación por revoluciones, como se ve de lo expuesto, puede ser ampliada regulando el hidromotor, pero la potencia ya no quedará constante.

Además de la transmisión hidráulica sencilla descrita para el mando de los generadores sincrónicos de los aviones, se emplea también la transmisión hidráulica diferencial, que viene a ser una combinación de un mecanismo de engranaje diferencial con la transmisión hidráulica. En el régimen calculado toda la potencia se transmite de modo

mecánico por medio de una transmisión planetaria, y la hidráulica no funciona. Si el número de revoluciones del árbol motriz cambia en uno a otro sentido del calculado, comienza a trabajar la transmisión hidráulica, que suministra la potencia que falta o deriva el exceso de la potencia. Se utilizan también transmisiones hidráulicas diferenciales con otro principio de funcionamiento.

### § 66. Transmisiones hidrodinámicas

Las transmisiones hidrodinámicas (de álabes) son una combinación de una bomba centrífuga con una turbina hidráulica, cuyos rodetes de trabajo están aproximados al máximo y dispuestos en un cuerpo común de modo coaxial.

Las transmisiones hidrodinámicas se dividen en *embragues hidráulicos* y *transformadores hidráulicos*. La diferencia de principio entre éstos consiste en que los primeros, al transmitir la potencia, no cambian el momento, y los segundos, lo aumentan o disminuyen, es decir, realizan la transformación del momento.

El esquema del embrague hidráulico se muestra en la fig. 176, *a*, donde 1 es el árbol motriz, 2, el árbol accionado, 3, el rodete de la bomba,

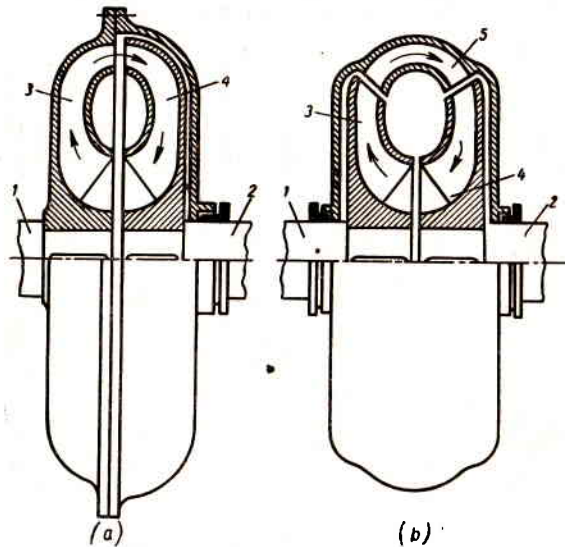


Fig. 176. Esquemas de las transmisiones hidrodinámicas

ba, 4, el rodete de la turbina. Al girar el rodete de la bomba unido rigidamente con el árbol motriz, el líquido se desplaza a la periferia y se rechaza al rodete de la turbina.

El flujo ejerce una fuerza sobre los álabes del rodete de la turbina y transmite al árbol accionado la energía que ha adquirido en el rodete

de la bomba. De este modo, en la cavidad cerrada de trabajo del embrague hidráulico el líquido circula ininterrumpidamente y la potencia se transmite de un árbol a otro, sin haber unión rígida entre ellos.

Si despreciamos el rozamiento de las superficies exteriores de los rodetes de trabajo con el líquido, se puede considerar que los momentos en los árboles motriz y accionado son iguales, o sea,

$$M_1 = M_2. \quad (14.16)$$

El rendimiento del embrague hidráulico  $\eta_{mh}$  se determina por consiguiente, de la relación de las revoluciones:

$$\eta_{mh} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{i}. \quad (14.17)$$

La diferencia entre la unidad y el rendimiento del embrague hidráulico se denomina deslizamiento relativo, o sea

$$S = 1 - \eta_{mh}.$$

Los embragues hidráulicos se proyectan generalmente de modo que en el régimen establecido y calculado de trabajo, la magnitud de deslizamiento  $S$  llegue a ser solamente un 2—4% y que la relación de transmisión y el rendimiento sean próximos a la unidad. Sin embargo, al aumentar el momento que se transmite, en comparación con el calculado, es decir, al sobrecargar el embrague, el patinaje aumenta, las revoluciones del rodete de la turbina disminuyen y el rendimiento  $\eta_{mh}$  baja.

Si es necesario realizar la transmisión de la potencia, cambiando el momento de rotación y con relación de transmisión diferenciada sustancialmente de la unidad, pero conservando un rendimiento bastante alto, se utilizan los transformadores hidráulicos. La peculiaridad del transformador hidráulico de álabes consiste en que entre los rodetes de la bomba y de la turbina está instalado un aparato guía fijo, es decir, un rodete de álabes complementario, rigidamente unido con el cuerpo. En el esquema del transformador hidráulico (fig. 176, *b*) el aparato guía está designado con la cifra 5, y los demás elementos, igual que en la fig. 176, *a*.

En lugar de la igualdad (14.16) para el transformador hidráulico tenemos

$$M_1 + M_{ag} = M_2,$$

donde  $M_{ag}$  es el momento reactivo que surge en los álabes del aparato guía.

En la fórmula citada, el momento  $M_{ag}$  es positivo, cuando al transmitir la potencia el transformador hidráulico disminuye las revoluciones y aumenta el momento, y es negativo, en caso contrario. De este modo, en el primer caso, el aparato guía aumenta los remolinos en el flujo creado por el rodete, lo que trae consigo el crecimiento de  $M_2$  y, en el segundo caso, disminuyen los remolinos.



Igual que para la transmisión hidráulica volumétrica rotativa, para el transformador hidráulico es justa la siguiente expresión para el rendimiento <sup>1)</sup>.

$$\eta_{th} = \frac{M_2 n_2}{M_1 n_1}$$

o, tomando en consideración (14.17) e introduciendo el coeficiente de transformación del momento  $k$ ,

$$\eta_{th} = k \eta_{mh}.$$

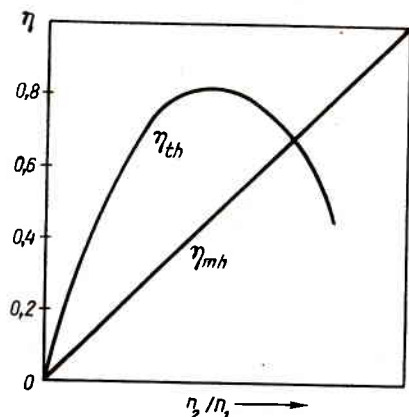


Fig. 177. Curvas de rendimiento de un manguito hidráulico y de un transformador hidráulico

En la fig. 177 se muestra el rendimiento del embrague hidráulico ( $\eta_{mh}$ ) y del transformador hidráulico ( $\eta_{th}$ ), si  $k > 1$ , en función de la relación de revoluciones  $\frac{n_2}{n_1}$ .

El primero se muestra en forma de una recta de acuerdo con la fórmula (14.17), y el segundo, tiene la forma de curva con valor máximo, cuando  $\frac{n_1}{n_2}$  es próximo a 0,5.

La comparación de las curvas indicadas muestra que el transformador hidráulico es más económico que el embrague hidráulico para grandes relaciones de transmisión  $i$  ( $\frac{n_2}{n_1}$  pequeñas). Al contrario, al acercarse el número  $i$  a la unidad, el embrague hidráulico llega a ser más económico. Pero la ventaja principal del primero en comparación con el segundo, para grandes valores de  $i$ , consiste en su capacidad de aumentar el momento, lo que muchas veces es necesario en la práctica.

<sup>1)</sup> Las transmisiones hidráulicas de movimiento rotatorio descritas en el § 65, son también transformadores hidráulicos, pero de otra clase: volumétricos rotativos.

Las transmisiones hidrodinámicas se emplean cada vez más ampliamente en las máquinas de transporte terrestre (automóviles, tractores, etc.), así como en las instalaciones marítimas. En todos estos casos es muy importante que, al arrancar la máquina, se obtenga el aumento del momento en el árbol accionado en comparación con el motriz, lo que se asegura con el transformador hidráulico. En el aceleramiento ulterior de la máquina esta transmisión disminuye gradualmente la relación de transmisión, y después se realiza la unión directa del árbol del motor con el accionado o la conversión automática del transformador hidráulico en embrague hidráulico (transmisión hidráulica compleja). Esta conversión se logra uniendo el aparato guía con el rodete de la bomba (o de la turbina), con lo que el primero comienza a girar junto con el segundo.

En la técnica de aviación los embragues hidrodinámicos se utilizan para transmitir la rotación del motor de arranque al rotor del motor principal de la turbina de gas.

## Ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto y su integración

### 1. Deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto

Vamos a demostrar que las ecuaciones principales de la hidrostática y la ecuación de Bernoulli para los casos considerados anteriormente pueden ser obtenidas integrando las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto. Deduzcamos estas ecuaciones y después integrémoslas para los principales casos particulares de equilibrio y movimiento.

Tomemos en un flujo estable de un líquido perfecto cualquier punto  $M$  con las coordenadas  $x, y$  y  $z$  (fig. 178). Pasado un lapso infinitesimal de tiempo  $dt$ , una partícula de líquido se desplazará a la posición  $M'$  desde el punto  $M$  a una distancia  $dl$ , cuya proyección sobre los ejes de coordenadas es igual a  $dx, dy$  y  $dz$ . De este modo, el segmento  $dl$  es un elemento de la trayectoria, la cual, en las condiciones de movimiento estable, coincide con la línea de la corriente.

Construyamos sobre el segmento  $dl$ , tomado como diagonal, un paralelepípedo rectangular con aristas paralelas a los ejes de las coordenadas  $y$ , por consiguiente, iguales a  $dx, dy$  y  $dz$  y examinemos este volumen elemental de líquido.

Compongamos ecuaciones diferenciales del movimiento del volumen escogido de líquido, cuya masa es igual a  $\rho dx dy dz$ .

Supongamos que las componentes de la unidad de fuerza de masa que actúa sobre el líquido junto al punto  $M$  son iguales a  $X, Y$  y  $Z$ . Entonces, las fuerzas de masa que actúan sobre el paralelepípedo en dirección de los ejes de las coordenadas serán iguales a estas componentes multiplicadas por la masa del paralelepípedo.

La velocidad del movimiento del líquido en el punto  $M$  la designaremos con  $v$ , y sus componentes, con  $v_x, v_y$  y  $v_z$ . Entonces, las proyecciones de la aceleración se expresarán en la forma siguiente:

$$\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_y}{dt}; \frac{dv_z}{dt}.$$

Supongamos que la presión en el punto  $M$  es igual a  $p$ . La presión  $p$  es función de las coordenadas  $x, y$  y  $z$ . Sin embargo, al pasar del punto  $M$ , por ejemplo, al punto  $N$  (véase la fig. 178), cambia solamente la coordenada  $x$  en una magnitud infinitesimal  $dx$ , debido a lo cual,

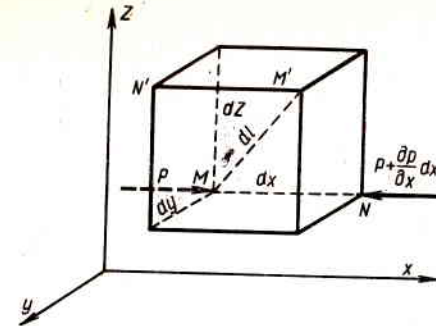


Fig. 178. Para la deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto

a función  $p$  recibe un incremento igual al diferencial particular:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Por ello, la presión en el punto  $N$  será igual a

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Examinando las presiones en otros puntos correspondientes de las aristas normales al eje  $x$ , por ejemplo, en los puntos  $N'$  y  $M'$ , vemos que estas presiones se diferencian en la misma magnitud (con exactitud de infinitesimales de órdenes superiores), igual a

$$p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Por lo tanto, la diferencia de las fuerzas de presión que actúan sobre el paralelepípedo en la dirección del eje  $x$  será igual a

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Anotemos las ecuaciones del movimiento del paralelepípedo en las proyecciones sobre los ejes de las coordenadas:

$$\rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} = X \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz;$$

$$\rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt} = Y \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz;$$

$$\rho dx dy dz \frac{dv_z}{dt} = Z \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz.$$



Dividamos los términos de estas ecuaciones por la masa del elemento  $\rho \, dx \, dy \, dz$  y pasemos al límite, aproximando  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  a cero, es decir, reduciendo el paralelepípedo al punto de partida  $M$ . Entonces, en el límite tendremos ecuaciones del movimiento del líquido, referidas al punto  $M$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

Estas ecuaciones fueron obtenidas por primera vez en 1755 por el miembro de la Academia de Ciencias de Rusia, el sabio de Petersburgo L. Euler y se denominan ecuaciones de Euler.

Los términos de estas ecuaciones representan las aceleraciones correspondientes y el sentido de cada una de las ecuaciones consiste en lo siguiente: la aceleración total de la partícula a lo largo del eje de las coordenadas consta de la aceleración de las fuerzas de masa y de la de fuerzas de presión.

Las ecuaciones de Euler en esta forma son justas tanto para el líquido incompresible, como para el compresible; son justas para el caso cuando de las fuerzas de masa actúe sólo la de gravedad, así como para el movimiento relativo del líquido. En este último caso, las magnitudes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  deben incluir las componentes de la aceleración de los movimientos de traslación o de rotación.

En el caso de líquido inmóvil

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_z}{dt} = 0,$$

y las ecuaciones diferenciales de Euler adquieren el aspecto siguiente:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

El sistema obtenido es el de ecuaciones diferenciales de equilibrio del líquido.

## 2. Función de fuerza. Superficies del nivel

Aprovechemos las ecuaciones diferenciales obtenidas para examinar algunas cuestiones del equilibrio del líquido.

Multipliquemos cada ecuación (A.2) por  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  respectivamente y, después, sumando estas ecuaciones, obtendremos

$$X \, dx + Y \, dy + Z \, dz = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (A.3)$$

El trinomio que está entre paréntesis en el miembro derecho de la ecuación (A.3) es el diferencial total de la función  $p(x, y, z)$ , es decir

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp,$$

y la ecuación (A.3) se puede expresar del modo siguiente:

$$X \, dx + Y \, dy + Z \, dz = \frac{1}{\rho} dp. \quad (A.3')$$

De aquí se puede deducir que el miembro izquierdo de la ecuación (A.3') debe ser el diferencial total de cierta función  $U(x, y, z)$ . Esta función debe poseer la siguiente propiedad: sus coeficientes derivados en las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  tienen que ser iguales a  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente, o sea

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z.$$

La función  $U$  se denomina función de fuerza. Como es sabido de la mecánica teórica, esta función es igual al potencial de fuerzas con signo contrario.

De este modo, se puede hacer la conclusión de que el equilibrio del líquido es posible sólo bajo la acción de las fuerzas de masa que tienen un potencial.

Introduciendo la función  $U$  en la ecuación principal (A.3') tendremos

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho} dp,$$

o bien,

$$dU = \frac{1}{\rho} dp. \quad (A.4)$$

Después de la integración tendremos en forma general:

$$p = \rho U + C. \quad (A.5)$$

La constante de integración la hallamos de las condiciones límites; supongamos que si  $U = U_0$   $p = p_0$ , entonces

$$p = p_0 + \rho(U - U_0). \quad (A.5')$$

Denominaremos superficie del nivel a la que satisface la condición siguiente:

$$U(x, y, z) = 0.$$

Esta superficie se denomina también superficie del potencial idéntico. Como se deduce de las ecuaciones (A.4) y (A.5') para todos los puntos de esta superficie tiene lugar la condición de:

$$dp = 0,$$

es decir,

$$p(x, y, z) = \text{const.}$$

Por consiguiente, la superficie del nivel, al mismo tiempo, tiene la misma presión.

Además, de lo expuesto se puede deducir, que para el líquido heterogéneo su densidad es función de la presión. Por eso, las superficies del nivel para el líquido heterogéneo serán también las del mismo plano. Esto significa que un líquido heterogéneo en equilibrio se dispone por capas de densidad igual, que corresponden a las superficies del nivel. Dicha propiedad se utiliza para separar las mezclas líquidas heterogéneas, en dispositivos llamados centrífugas.

Introduzcamos en el análisis la fuerza resultante de masa de unidad  $j$ , cuyas proyecciones sobre los ejes de las coordenadas son iguales a  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , es decir, tomemos la aceleración total provocada por la acción de todas las fuerzas de masa en el punto dado. Después, tomemos en consideración que las magnitudes  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  son proyecciones del segmento infinitesimal  $dl$ , que es la distancia entre dos puntos próximos  $M$  y  $M'$  (véase la fig. 178).

Basándose en lo expuesto, se pueden anotar las igualdades siguientes

$$X = j \cos(\widehat{j, x}); \quad Y = j \cos(\widehat{j, y}); \quad Z = j \cos(\widehat{j, z})$$

y

$$dx = dl \cos(\widehat{dl, x}); \quad dy = dl \cos(\widehat{dl, y}); \quad dz = dl \cos(\widehat{dl, z}).$$

Ahora, aplicando la fórmula para determinar el coseno del ángulo entre dos rectas en el espacio, tendremos

$$X dx + Y dy + Z dz = j dl \cos(\widehat{j, dl}) = dU.$$

Colocando la expresión obtenida para  $dU$  en la fórmula (A.4) y determinando  $dp$ , tendremos

$$dp = \rho j dl \cos(\widehat{j, dl}). \quad (\text{A.6})$$

De la fórmula (A.6) se ve que el incremento máximo de la presión se obtiene en dirección de la fuerza de masa resultante  $j$ , ya que el  $\cos(\widehat{j, dl})$  aquí es igual a la unidad.

Para cualquier segmento  $dl$  situado en la superficie del nivel, el incremento  $dp = 0$ . Pero en el caso general  $j$  y  $dl$  no son iguales a cero;

por consiguiente, el  $\cos(\widehat{j, dl}) = 0$ , es decir, la fuerza de masa resultante está dirigida por la normal a la superficie del nivel.

Utilizando esta propiedad de la superficie del nivel, se puede hallar fácilmente la posición de la superficie libre del líquido en el caso en que, además de la fuerza de gravedad, actúan sobre éste otras fuerzas de masa.

### 3. Integración de la ecuación diferencial del equilibrio del líquido

Analicemos la integración de la ecuación diferencial del equilibrio del líquido (A.3') o (A.6) para tres casos concretos, mencionados en los capítulos 2 y 3, a saber: para el principal caso particular, es decir, el equilibrio del líquido bajo la acción de la fuerza de gravedad, y para dos casos de reposo relativo.

1. Supongamos que de las fuerzas de masa sobre el líquido actúa sólo la de gravedad. Dirigiendo el eje  $z$  por la vertical hacia arriba, tendremos

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Después de la sustitución en la ecuación (A.3'), tendremos

$$-g dz = \frac{dp}{\rho},$$

o bien,

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz.$$

Efectuada la integración, tendremos

$$p = -\gamma z + C.$$

La constante de integración la hallamos de las condiciones para la superficie libre, donde  $z = z_0$ ,  $p = p_0$  (véase la fig. 6); por consiguiente,

$$C = p_0 + \gamma z_0.$$

De donde

$$p = p_0 + (z_0 - z) \gamma,$$

o

$$p = p_0 + h \gamma.$$

Hemos llegado a la ecuación (2.2) que obtuvimos por otro camino en el § 6.

2. Supongamos que el líquido se encuentra en un recipiente que se traslada con movimiento rectilíneo y con aceleración uniforme, es decir, el líquido está en reposo relativo, lo que se ha examinado en el



§ 11. En este caso es cómodo aprovechar la ecuación (A.6), habiendo escogido la dirección  $l$  paralela a la resultante de la fuerza de masa  $j$  (véase la fig. 19). Tendremos

$$\cos(j, dl) = 0$$

y, por consiguiente,

$$dp = \rho j dl.$$

Hecha la integración, tendremos

$$p = \rho j l + C.$$

Puesto que siendo  $l = 0$ ,  $p = p_0$ , entonces  $C = p_0$ , y tendremos definitivamente la ecuación ya conocida (3.1):

$$p = p_0 + j \rho l.$$

3. Supongamos que el líquido se encuentra en un recipiente que gira uniformemente alrededor de su eje vertical con velocidad angular  $\omega$ , es decir, tiene lugar el reposo relativo, examinado en el § 12. Colocando el origen de las coordenadas en el centro del fondo del recipiente y dirigiendo el eje por la vertical hacia arriba, tendremos

$$X = \omega^2 r \cos(r, x) = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 r \cos(r, y) = \omega^2 y;$$

$$Z = -g.$$

Sustituyendo estas magnitudes en la ecuación de equilibrio (A.3') tendremos

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = \frac{dp}{\rho}$$

o

$$dp = \frac{\gamma}{g} \omega^2 (x dx + y dy) - \gamma dz.$$

Si tenemos en cuenta que

$$x dx + y dy = d\left(\frac{r^2}{2}\right),$$

entonces, después de la integración, tendremos

$$p = \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2 - \gamma z + C.$$

Si  $r = 0$  y  $z = h$   $p = p_0$ , por consiguiente,

$$C = p_0 + h\gamma.$$

Definitivamente tendremos

$$p = p_0 + \gamma(h - z) + \frac{\gamma}{2g} \omega^2 r^2. \quad (A.7)$$

La ecuación de la superficie libre del líquido puede ser obtenida si en la ecuación (A.7) tomamos  $p = p_0$ . Después de las reducciones y la conversión, tendremos

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h,$$

lo que coincide completamente con la fórmula (3.2) obtenida anteriormente.

Si despreciamos en la expresión anterior la fuerza de gravedad ( $Z = 0$ ), y determinamos la constante de integración de la condición de que  $r = r_0$ ,  $p = p_0$ , obtendremos la fórmula ya conocida (3.3), a saber:

$$p = p_0 + \gamma \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2).$$

#### 4. Integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido

Examinando la corriente estable del líquido, multipliquemos cada una de las ecuaciones del movimiento (A.1) por las proyecciones correspondientes de desplazamiento elemental, iguales a

$$dx = v_x dt; \quad dy = v_y dt; \quad dz = v_z dt,$$

y sumemos las ecuaciones. Tendremos

$$X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z.$$

Teniendo en cuenta que

$$v_x dv_x = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right);$$

$$v_y dv_y = d\left(\frac{v_y^2}{2}\right);$$

$$v_z dv_z = d\left(\frac{v_z^2}{2}\right);$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2,$$

se puede expresar la ecuación anterior en la forma siguiente:

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad (A.8)$$

$$dU = \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Integremos esta ecuación para el principal caso particular del movimiento del líquido perfecto, cuando sobre éste actúa sólo una fuerza de masa, la gravedad, así como para los dos casos de movimiento relativo.

1. Para el primer caso, si dirigimos el eje  $z$  por la vertical hacia arriba, resulta

$$X=0; \quad Y=0; \quad Z=-g.$$

Colocando estos valores en la ecuación (A.8), tendremos

$$gdz + \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

$$dz + \frac{1}{\gamma} dp + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0.$$

Puesto que para un líquido incompresible  $\gamma = \text{const.}$ , la ecuación anterior se puede presentar en la forma siguiente:

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) = 0.$$

Esta ecuación significa, que el incremento de la suma de los tres términos comprendidos entre paréntesis, al desplazarse a lo largo de la línea de la corriente (trayectoria) es igual a cero. De aquí concluimos que el trinomio citado es una magnitud constante a lo largo de la línea de la corriente y, por consiguiente, también a lo largo del filete elemental, o sea

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const.}$$

Esto es la ecuación de Bernoulli para el filete de líquido perfecto obtenida más arriba, en el § 15.

Si la ecuación se aplica para dos secciones del filete, adquiere la forma ya conocida (4.12):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

2. Supongamos que el líquido se mueve por el cauce, el que a su vez se desplaza en el espacio con aceleración constante  $a$  (fig. 104). Entonces, sobre todas las partículas del líquido actuará la fuerza de masa de unidad  $j'$ , igual numéricamente a la aceleración  $a$ , pero dirigida en el sentido opuesto. Si designamos las componentes de esta fuerza con  $j'_x$ ,  $j'_y$  y  $j'_z$  entonces

$$X = j'_x; \quad Y = j'_y; \quad Z = j'_z - g$$

y el incremento de la función de fuerza será igual a

$$dU = j'_x dx + j'_y dy + (j'_z - g) dz.$$

La ecuación (A.8) se expresará en la forma siguiente:

$$j'_x dx + j'_y dy + (j'_z - g) dz = \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Después de la integración y simplificando, tendremos

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - (j'_x dx + j'_y dy + j'_z dz) = \text{const.}$$

Si aplicamos esta ecuación para dos secciones del filete con las coordenadas de los centros de gravedad de estas secciones  $x_1, y_1, z_1$ , y  $x_2, y_2, z_2$ , entonces adquiere la forma siguiente:

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{1}{g} (j'_x x_1 + j'_y y_1 + j'_z z_1) = \\ = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{1}{g} (j'_x x_2 + j'_y y_2 + j'_z z_2), \end{aligned}$$

o

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{\text{in}},$$

donde  $\Delta H_{\text{in}}$  es la presión de inercia, igual a

$$\Delta H_{\text{in}} = \frac{j'_x}{g} (x_1 - x_2) + \frac{j'_y}{g} (y_1 - y_2) + \frac{j'_z}{g} (z_1 - z_2)$$

o

$$\Delta H_{\text{in}} = \frac{j'}{g} l_a = \frac{a}{g} l_a.$$

Aquí  $l_a$  es la longitud de la proyección del sector del filete (del cauce), que se considera sobre la dirección de la aceleración  $a$ , es decir, la distancia entre dos puntos de coordenadas  $x_1, y_1, z_1$  y  $x_2, y_2, z_2$ .

El mismo resultado hemos obtenido en el § 40.

3. Supongamos que el cauce por el cual fluye el líquido gira uniformemente alrededor de un eje vertical con velocidad angular  $\omega$  (fig. 105).

Entonces

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = -g,$$

y la ecuación (A.8) tendrá el aspecto siguiente

$$\omega^2 x dz + \omega^2 y dy - g dz = \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

$$\omega^2 d\left(\frac{r^2}{2}\right) - g dz = \frac{1}{\rho} dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Después de la integración y las conversiones, tendremos

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \text{const.}$$



o bien,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{in.},$$

donde

$$\Delta H_{in.} = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2).$$

Hemos llegado a la misma fórmula (10.3), que fue obtenida en el § 40.

De este modo, todas las ecuaciones principales de equilibrio y movimiento del líquido perfecto obtenidas más arriba, al examinar los fenómenos físicos concretos, pueden ser deducidas más exactamente mediante la integración de las ecuaciones diferenciales generales de Euler.

## INDICE

### 1. Introducción

§ 1. La Hidráulica como disciplina . . . . .	5
§ 2. Breve ensayo histórico del desarrollo de la Hidráulica . . . . .	8
§ 3. Fuerzas que actúan sobre el líquido. Presión en el líquido . . . . .	12
§ 4. Propiedades principales de los líquidos . . . . .	13

### 2. Hidrostática

§ 5. Propiedades de la presión hidrostática . . . . .	21
§ 6. Ecuación fundamental de la hidrostática . . . . .	23
§ 7. Altura piezométrica. Vacío. Medición de la presión . . . . .	25
§ 8. La fuerza de presión del líquido sobre una pared plana . . . . .	30
§ 9. La fuerza de presión del líquido sobre superficies cilíndricas y esféricas. Flotación de los cuerpos . . . . .	33

### 3. Reposo relativo del líquido

§ 10. Nociones fundamentales . . . . .	40
§ 11. Movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado de un recipiente con líquido . . . . .	41
§ 12. Rotación uniforme de un recipiente con líquido . . . . .	43

### 4. Ecuaciones fundamentales de hidráulica

§ 13. Nociones básicas . . . . .	47
§ 14. Gasto. Ecuación del gasto . . . . .	49
§ 15. Obtención de la ecuación de Bernoulli para un filete de líquido perfecto . . . . .	50
§ 16. Ecuación de Bernoulli para la corriente real . . . . .	56
§ 17. Pérdidas hidráulicas (generalidades) . . . . .	59
§ 18. Ejemplos de aplicación de la ecuación de Bernoulli en la técnica . . . . .	63

### 5. Regímenes de corriente de líquidos en los tubos. Semejanza hidrodinámica

§ 19. Regímenes de corriente de líquidos en los tubos . . . . .	68
§ 20. Semejanza hidrodinámica . . . . .	71
§ 21. Cavitación . . . . .	76

<b>6. Corriente laminar</b>	
§ 22. Teoría de la corriente laminar del líquido en un tubo circular . . . . .	80
§ 23. Sector inicial de la corriente laminar. Coeficiente $\alpha$ . . . . .	84
§ 24. Corriente laminar en el espacio libre entre dos paredes paralelas . . . . .	87
<b>7. Corriente turbulenta</b>	
§ 25. Corriente turbulenta de un líquido en tubos lisos . . . . .	92
§ 26. Corriente turbulenta en tubos con rugosidades . . . . .	97
§ 27. Corriente turbulenta en tubos no circulares . . . . .	101
<b>8. Resistencias hidráulicas locales</b>	
§ 28. Nociones generales sobre las resistencias locales . . . . .	104
§ 29. Ensanchamiento brusco del cauce . . . . .	105
§ 30. Ensanchamiento gradual del tubo . . . . .	108
§ 31. Contracción del tubo . . . . .	112
§ 32. Codo del tubo . . . . .	114
§ 33. Resistencias locales para el régimen laminar . . . . .	118
§ 34. Resistencias locales de los sistemas hidráulicos de aviones . . . . .	122
<b>9. Esgurrimiento o derrame del líquido a través de orificios y boquillas adicionales</b>	
§ 35. Orificio con arista viva en una pared delgada . . . . .	125
§ 36. Contracción incompleta y parcial. Esgurrimiento debajo del nivel . . . . .	130
§ 37. Esgurrimiento por boquillas adicionales . . . . .	133
§ 38. Esgurrimiento a presión variable (vaciado de los recipientes) . . . . .	138
§ 39. Inyector . . . . .	142
<b>10. Movimiento relativo y no estable del líquido en los tubos</b>	
§ 40. Ecuación de Bernoulli para el movimiento relativo . . . . .	151
§ 41. Corriente del líquido no estable en los tubos . . . . .	154
§ 42. Choque hidráulico en los tubos . . . . .	157
<b>11. Cálculo de tuberías</b>	
§ 43. Tubería simple . . . . .	164
§ 44. Sifón . . . . .	168
§ 45. Acoplamiento de tubos en serie y en paralelo . . . . .	169
§ 46. Cálculo de tuberías ramificadas y complejas . . . . .	172
§ 47. Tubería con suministro de líquido por bomba . . . . .	174
<b>12. Bombas centrífugas</b>	
§ 48. Nociones generales . . . . .	185
§ 49. Deducción de la ecuación fundamental de la bomba centrífuga . . . . .	186
§ 50. Característica de la bomba ideal. Grado de reactividad de la bomba . . . . .	190
§ 51. Número finito de álabes . . . . .	193
§ 52. Cálculo de las pérdidas hidráulicas en el interior de la bomba. Trazado de la curva característica de la bomba . . . . .	196
§ 53. Rendimiento de la bomba . . . . .	199
§ 54. Fórmulas de semejanza . . . . .	201
§ 55. Velocidad característica y su relación con la forma del rodete . . . . .	206

§ 56. Relación de la velocidad característica con el rendimiento de la bomba . . . . .	209
§ 57. Cálculo de la cavitación en las bombas centrífugas (según S. Rúdniev) . . . . .	214
§ 58. Cálculo de la voluta espiral de la bomba . . . . .	219
§ 59. Selección del tipo de bomba. Particularidades de las bombas centrífugas que se emplean en la técnica de aviación y de cohetes . . . . .	221
<b>13. Bombas volumétricas rotativas</b>	
§ 60. Generalidades . . . . .	228
§ 61. Variedades de las bombas volumétricas rotativas . . . . .	231
§ 62. Características de las bombas volumétricas rotativas . . . . .	238
<b>14. Transmisiones hidráulicas</b>	
§ 63. Transmisiones hidráulicas de movimiento de vaivén . . . . .	244
§ 64. Transmisiones hidráulicas de seguimiento (boosters) . . . . .	247
§ 65. Transmisiones hidráulicas de movimiento rotatorio (volumétricas rotativas) . . . . .	256
§ 66. Transmisiones hidrodinámicas . . . . .	262
<b>Apéndice. Ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto y su integración</b>	
1. Deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido perfecto . . . . .	266
2. Función de fuerza. Superficies del nivel . . . . .	268
3. Integración de la ecuación diferencial del equilibrio del líquido . . . . .	271
4. Integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento del líquido . . . . .	273

